DEVOIR DE MATHS

Niveau : 7C	*Durée : 4h*	*Proposé le 30 Janvier 2015 de 8h à 12h*

Exercice 1 (4 points)

Soit $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $E(\theta)$ l'équation : $z^2-(3+i)ze^{i\theta}+2(1+i)e^{2i\theta}=0$.

1° a) Résoudre $E(\theta)$, on note z' et z'' les solutions telles que $|z'|>|z''|$.

b) Mettre sous forme exponentielle le nombre z''.

2° Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les ponts A,B,C d'affixes respectives $2e^{i\theta},(1+i)e^{i\theta},ie^{i\theta}$.

a) Montrer que les droites $(OA),(OC)$ d'une part et (BO), (BA) d'autre part sont perpendiculaires.

b) Pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, placer les points A,B,C.

c) Montrer que $OABC$ est un trapèze rectangle.

d) Montrer que l'aire du quadrilatère $OABC$ est indépendante de θ.

Exercice 2 (4 points)

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 7. On pose $n=p^4-1$.

1° a) Montrer que l'on a : $p\equiv 1\,[3]$ ou $p\equiv -1\,[3]$.

b) En déduire que n est divisible par 3.

2° a) Vérifier que p est impair. En justifier qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2-1=4k(k+1)$.

b) En déduire que n est divisible par 16.

3° a) Quel sont les restes possibles de p modulo 5 ?

b) En déduire que 5 divise n.

c) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer que si a et b divisent c alors ab divise c.

d) En déduire que 240 divise n.

Exercice 3 (6 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=x^2(x+2)$.

1° Dresser le tableau de variations de g sur $[0;+\infty[$.

2° Démontrer que l'équation $g(x)=4$ admet, sur $[0;+\infty[$, une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1}.

3° En déduire la résolution de l'inéquation $g(x)>4$ sur $[0;+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}+x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité 1 cm).

1° Etudier la parité de f.

2° Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, en déduire $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.
Peut-on en déduire une ou plusieurs droites asymptotes à la courbe (C_f) ?
3° Démontrer que la droite **(*D*)** d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$, en déduire l'équation d'une droite asymptote à (C_f) en $-\infty$.

4° a) Démontrer que f est dérivable sur les intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ puis que $f'(x)=\dfrac{\sqrt{g(x^2)}-2}{x^2\sqrt{x^2+2}}$.

b) Déduire de la **partie A** que $f'(x)>0$ sur $]\sqrt{\alpha}\,;+\infty[$.

c) En déduire les variations de f sur $]0\,;+\infty[$ puis sur $\mathbb{R}^*$. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}^*$.
5° Déterminer une équation de la tangente **(T)** à (C_f) au point d'abscisse $\sqrt{2}$.
6° Tracer la courbe (C_f) en vous aidant de tous les renseignements obtenus précédemment.

Exercice 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $I=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\sin x}{\cos x};\ x\neq\dfrac{\pi}{2} \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$.

1° a) Montrer que f est continue à gauche de $\dfrac{\pi}{2}$.

b) Montrer que f est dérivable à gauche de $\dfrac{\pi}{2}$ et déterminer $f_g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2° a) Montrer que pour tout $x\in I$, on a : $f'(x)=\dfrac{-1}{1+\sin x}$.
b) Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
On note g la fonction réciproque de f. Calculer $g(0)$ et $g(1)$.

c) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α tel que : $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$.

d) Tracer les courbes (C_f), (C_g).

3° a) Montrer que $\forall x\in I$, $(f(x))^2=\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$. Exprimer $\sin x$ en fonction de $(f(x))^2$.

b) Montrer que g est dérivable sur J et que $g'(x)=\dfrac{-2}{1+x^2}$.

4° Soit h la fonction sur $[0,1]$ par : $h(x)=g(x)-g\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ pour $x\in[0,1[$ et $h(1)=\dfrac{\pi}{2}$.
a) Montrer que h est continue sur de $[0,1]$.
b) Montrer que h est dérivable sur $[0,1[$ et calculer $h'(x)$. En déduire l'expression de $h(x)$.

5° On considère la suite (u_n) définie par : $u_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} g\left(\alpha+\dfrac{1}{n+k}\right)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{n+1}{n}g\left(\alpha+\dfrac{1}{n}\right)\le u_n\le\dfrac{n+1}{n}g\left(\alpha+\dfrac{1}{2n}\right)$.

b) En déduire que (u_n) est convergente vers α.

Fin