DEVOIR DE MATHS

Niveau : 7C	Durée : 4h	Proposé le 21 février 2016 de 8h à 12h

Exercice 1 (3 points)

1.a) Déterminer l'ensemble A des entiers relatifs n tels que $n+2$ divise 5

b) Déterminer l'ensemble B des entiers relatifs n tels que $n+2$ divise $2n-1$.

2) Montrer que pour tout entier relatif n, les nombres $n+2$ et $2n^2+3n-1$ sont premiers entre eux.

3) Déterminer l'ensemble C des entiers relatifs n, $n \neq -2$, tels que $\dfrac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$ soit un entier relatif.

Exercice 2 (3 points)

Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

1.a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $(\cos^2\theta)z^2-(2\cos^2\theta)z+1=0$

b) On note $z_1;z_2$ les solutions de (E) avec $\operatorname{Im} z_1 \geq 0$. Ecrire $z_1;z_2$ sous forme exponentielle. Justifier.

2.a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$: $\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{a\cos\theta}{1-\sin\theta}+\dfrac{b\cos\theta}{1+\sin\theta}$

b) On pose $F(t)=\int_0^t |z_1|d\theta$ où $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. Donner l'expression de $F(t)$ en fonction de t puis calculer l'intégrale :

$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}|z_1|d\theta$. L'écriture $|z_1|$ désigne le module de la solution z_1 de l'équation (E).

Exercice 3 (3 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3-5z^2+6iz+28+12i=0$: (E).

1) Trouver les solutions de (E) notées z_0, z_1 et z_2 telles que $z_0\in\mathbb{R}$ et $\operatorname{Im}(z_2)<0$.

2) Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. On donne les points A, B et C d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 et pour tout point M du plan on pose : $f(M)=MA^2-MB^2-2MC^2$.

a) G barycentre du système : $\{(A,1),(B,-1),(C,-2)\}$. Déterminer l'affixe de G.

b) Représenter les points A, B, C et G.

c) Discuter suivant les valeurs du réel k la nature de l'ensemble Γ_k des points M du plan tels que : $f(M)=k$.

d) Déterminer k pour que $A\in\Gamma_k$. Dans ce cas Γ_k sera noté simplement Γ. Construire alors Γ.

3) Soient M_1 et M_2 deux points variables de Γ tels que : $(\overrightarrow{AM_1},\overrightarrow{AM_2})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})[\pi]$. Déterminer le lieu géométrique du point N symétrique de M_1 par rapport à la droite (AM_2) puis le construire sur la figure précédente.

Exercice 4 (4 points)

On se propose dans cet exercice de calculer, par trois méthodes différentes, l'intégrale $I=\int_2^3\sqrt{-x^2+6x-8}\,dx$.

On considère la fonction f de variable réelle x définie sur $[2,4]$ par $f(x)=\sqrt{-x^2+6x-8}$.

Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

<u>1) Méthode a</u> : a) Montrer que Γ est un arc d'un cercle C dont on précisera le centre et le rayon.

b) Tracer Γ (Sans étudier f) et donner une interprétation géométrique de l'intégrale $I=\int_2^3\sqrt{-x^2+6x-8}\,dx$.

c) Donner la valeur de I sans calculs de primitives ou d'intégrales.

<u>2) Méthode b</u> : a) On pose $g(x)=\sin x$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$. Montrer que g réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle que l'on déterminera et montrer que $(g^{-1})'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) Calculer la dérivée de la fonction H définie par : $H(x)=(x-3)\sqrt{-x^2+6x+8}+g^{-1}(x-3)$.

c) Trouver une primitive de f sur l'intervalle $[2,4]$ et calculer I.

3) Méthode c : En posant $x=3+\cos t$, calculer I et comparer avec les résultats précédents.

Exercice 5 (7 points)

Partie I : Soit la fonction numérique f définie sur [0;1] par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{-x^2\ln x}{1+x}; & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1.a) Montrer que la fonction u définie sur [0;1] par : $u(x)=\dfrac{1+x}{2+x}+\ln x$ est strictement croissante.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction u . En déduire que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution $\beta\in]0;1]$. Vérifier que $0{,}54\leq\beta\leq 0{,}55$.

2.a) Montrer que la fonction f est continue sur [0;1].

b) Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative dans repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Préciser les tangentes aux points d'abscisse 0 et 1.

Partie II ; Dans cette partie on se propose de donner une valeur approchée de l'intégrale $J=\int_0^1 f(t)dt$. On ne demande pas de calculer J.

1) Etude d'une intégrale auxiliaire

Soit n un entier naturel, $n\geq 1$. g_n la fonction définie sur [0;1] par : $\begin{cases} g_n(t)=-t^n\ln t; & t>0 \\ g_n(0)=0 \end{cases}$

a) Montrer que la fonction g_n est continue sur [0;1].

b) Soit G_n la fonction définie sur [0;1] par : $\begin{cases} G_n(t)=-\dfrac{t^{n+1}\ln t}{n+1}+\dfrac{t^{n+1}}{(n+1)^2}; & t>0 \\ G_n(0)=0 \end{cases}$

Montrer que G_n est une primitive de g_n sur [0;1]. En déduire la valeur de $J_n=\int_0^1 g_n(t)dt$.

2) Etude de l'intégrale J

Soit t un réel et n un entier naturel non nul.

a) Calculer le produit $P_n(t)=(1+t)(1-t+t^2+\ldots+(-1)^{n-1}t^{n-1})$.

En déduire que pour tout réel $t\neq -1$: $\dfrac{1}{1+t}=1-t+t^2+\ldots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+\dfrac{(-1)^n t^n}{1+t}$.

b) Montrer que : $\forall t\in[0;1],\quad f(t)=g_2(t)-g_3(t)+g_4(t)-\ldots+(-1)^{n-1}g_{n+1}(t)+\dfrac{(-1)^n g_{n+2}(t)}{1+t}$, et que :

$J=J_2-J_3+J_4-\ldots+(-1)^{n-1}J_{n+1}(t)+(-1)^n\int_0^1\dfrac{g_{n+2}(t)}{1+t}dt$.

c) Donner un majorant de $\dfrac{g_{n+2}(t)}{1+t}$ puis démontrer que $0\leq\int_0^1\dfrac{g_{n+2}(t)}{1+t}dt\leq\dfrac{1}{(n+3)^2}$.

3) Approximation de J

Soit n un entier naturel non nul. On pose $S_n=\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(n+2)^2}$

a) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=J$ et que : $S_8\leq J\leq S_9$.

b) En déduire une valeur approchée de J à $5\cdot 10^{-3}$ près.

Fin.