DEVOIR DE MATHS

Niveau : 7C	*Durée :4h*	*Proposé le 16 Mai 2014 de 8h à 12h*

Exercice 1 (3 points)

Dans le plan affine rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on considère l'ensemble (E_m) des points $M(x,y)$ tels que : $(m-1)x^2+3my^2+2(m-1)x+3+m=0$, où m est un paramètre réel..

1° Déterminer (E_m) dans les cas suivants $m=0;m=1$.

2° Quelle est la valeur de m pour laquelle (E_m) est un cercle?

3° On suppose que $m\neq 0, m\neq 1$ et soit $O'(-1,0)$. On note (X,Y) les coordonnées de M dans le repère $(O'\,;\vec{u}\,,\vec{v})$

a) Montrer que l'équation de (E_m) dans ce repère est : $(m-1)X^2+3mY^2+4=0$.

b) Discuter suivant les valeurs de m la nature de la courbe (E_m).

c) Déterminer les éléments géométriques de : $\left(E_{\frac{1}{3}}\right)$ et (E_{-3}) puis les construire.

Exercice 2 (4 points)

Soit $OABC$ un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB , OBC et OCA sont rectangles en O). On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

1° a) Montrer que les paires d'arêtes opposées sont perpendiculaires. Exemple : $(OC)\perp(AB)$.

b) Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC .

2° L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ et $C(0,0,3)$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par O et orthogonale à (ABC).

c) Montrer que le plan (ABC) et la droite (D) se coupent en le point $H\left(\frac{36}{49},\frac{18}{49},\frac{12}{49}\right)$.

3° a) Trouver des coefficients entiers a,b et c tels que : $H=\text{bar}\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$.

b) Vérifier que O appartient aux ensembles suivants puis les déterminer:

$M\in S \Leftrightarrow 1764MA^2+441MB^2+196MC^2=5112$.

$M\in P \Leftrightarrow 49\left(1764\,\overrightarrow{MA}+441\,\overrightarrow{MB}+196\,\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{MO}\right)=85716$

4° a) Calculer la distance du point O au plan (ABC).

b) Calculer le volume du tétraèdre $OABC$. En déduire l'aire du triangle ABC .

c) Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

Exercice 3 (6 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré direct $ABCD$, de centre O .

On pose : $I=B*C$; $A'=S_B(A)$; $D'=S_C(D)$; $J=C*A'$; $K=C*D$. Le symbole * désigne le milieu.

1° a) Faire une figure illustrant les données qu'on complétera au fur et à mesure. On prendra AB horizontale.

b) Montrer qu'il existe une seule rotation r telle que : $r(D)=B$ et $r(A)=A'$. Caractériser r .

c) Trouver les axes Δ,Δ' tels que : $r=S_{(CA)}\circ S_\Delta=S_{(A'C)}\circ S_{\Delta'}$. d) Caractériser l'application : $f=S_{(CA)}\circ S_{(DC)}\circ S_{(BC)}$

2° Soit φ l'antidéplacement défini par $\varphi(D)=B$ et $\varphi(A)=A'$. Montrer que φ est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

3° On désigne par Γ et Γ' les cercles de diamètres respectifs $[CD]$ et $[CA']$.

a) Soit s la similitude directe qui envoie O en C et C en B . Déterminer le rapport et un angle de s et préciser $s(K)$.

b) Soit Ω le centre de s. Montrer que Ω est sur Γ et sur Γ'. c) Montrer que Γ' est l'image de Γ par s

4° a) Soit $\mathbf{M}$ un point d'image $\mathbf{M'}$ par $\mathbf{s}$. Montrer que si $\mathbf{M}\in\Gamma$ alors $\mathbf{C}$, $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M'}$ sont alignés.
b) En déduire une construction simple de $\mathbf{M'}$ à partir de $\mathbf{M}$.
c) Déterminer l'image de $\mathbf{D}$ et construire l'antécédent $\mathbf{L}$ de $\mathbf{A'}$ par $\mathbf{s}$.

5° On munit le plan du repère orthonormé $\left(\mathbf{A},\overrightarrow{\mathbf{AB}},\overrightarrow{\mathbf{AD}}\right)$.

a) Donner l'expression complexe de $\mathbf{s}$. Trouver l'affixe du centre $\boldsymbol{\Omega}$ de $\mathbf{s}$.
b) Retrouver l'image de $\mathbf{D}$ et l'antécédent de $\mathbf{A'}$ par leurs affixes.

6°.a) Soit $(\mathbf{P})$ la parabole de foyer $\mathbf{C}$ et de directrice $(\mathbf{BD})$. Vérifier que $(\mathbf{P})$ passe par les points $\mathbf{J}$ et $\mathbf{L}$.
b) Montrer que les droites $(\mathbf{OI})$ et $(\mathbf{OK})$ sont tangentes à $(\mathbf{P})$ et préciser les points de contact.
c) Existe-t-il une autre parabole, de directrice $(\mathbf{BD})$, passant par les points $\mathbf{J}$ et $\mathbf{L}$?

Exercice 4 (7 points)

1° On considère la fonction $\mathbf{f}$ définie sur $]-1,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right); x\le 0 \\ f(x)=1-e^{-x}; x\ge 0\end{cases}$. On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, d'unité graphique $\mathbf{2\ cm}$.

a) Montrer que $\mathbf{f}$ est continue, dérivable en $\mathbf{0}$ et calculer $\mathbf{f'(0)}$. b) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$.

2° a) Etudier les variations de la fonction $\mathbf{u}$ définie sur $]-1,+\infty[$ par : $u(x)=f(x)-x$
b) Déduire la position de Γ par rapport à la droite $(\mathbf{D})$: $y=x$. Tracer Γ et $(\mathbf{D})$.

3° a) Montrer que $\mathbf{f}$ réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un intervalle $\mathbf{J}$ que l'on précisera.
b) Soit $\mathbf{g}$ la fonction réciproque de $\mathbf{f}$. Expliciter $g(x)$ pour tout $\mathbf{x}$ de $\mathbf{J}$. Tracer la courbe Γ' de $\mathbf{g}$ dans le même repère.
c) Calculer en $\mathbf{cm^2}$ l'aire de la partie du plan limitée par Γ, Γ' et les droites $x=1$ et $y=1$.

4° On pose pour tout $n\ge 1$: $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\times 2^3}+\dfrac{1}{5\times 2^5}+\dots+\dfrac{1}{(2n-1)\times 2^{2n-1}}$ et $R_n=\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{x^{2n}}{1-x^2}dx$

a) Montrer que pour tout $x\in\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$ on a : $x^{2n}\le\dfrac{x^{2n}}{1-x^2}\le\dfrac{4x^{2n}}{3}$.

b) En déduire que pour tout $n\ge 1$ on a : $\dfrac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}\le R_n\le\dfrac{1}{3(2n+1)2^{2n-1}}$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n$.

5° a) Montrer que pour tout $x\in\,]-1,0]$ on a : $f'(x)=1+x^2+x^4+\dots+x^{2n-2}+\dfrac{x^{2n}}{1-x^2}$.
b) En déduire que (S_n) est convergente et calculer sa limite.

6° Soit $\mathbf{n}$ un entier naturel non nul on pose : $u_n=\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ et $I_n=\displaystyle\int_0^{1-\frac{1}{n}}g(x)dx$

Vérifier que pour tout $n\ge 2$ on a : $u_n=\sqrt[n]{\dfrac{n^{n-1}}{(n-1)!}}$. En déduire que pour tout $n\ge 2$ on a : $\ln u_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}g\left(\frac{k}{n}\right)$

7° a) Montrer que pour tout $0\le k\le n-2$ on a : $\dfrac{1}{n}g\left(\dfrac{k}{n}\right)\le\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}g(x)dx\le\frac{1}{n}g\left(\frac{k+1}{n}\right)$

b) En déduire que pour tout $n\ge 2$ on a : $\ln u_n+\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{1}{n}\right)\le I_n\le\ln u_n$

8° a) Calculer I_n en fonction de $\mathbf{n}$.(on remarquera que pour $x\ne 1$: $\dfrac{x}{1-x}=-1+\dfrac{1}{1-x}$

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{n}\le\ln u_n\le 1-\dfrac{1}{n}$.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Fin