DEVOIR DE MATHS
Bac Blanc

Niveau : 7D	*Durée :4h*	*Proposé le 26 décembre 2014 de 8h à 12h*

EXERCICE 1 (3 POINTS)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, avec justification, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses			
		a	b	c	d
1	La forme algébrique de $\frac{-1+7i}{3+4i}$ est	$-\frac{1}{7}+i$	$1+i$	$-1+i$	$1-i$
2	Le module de $\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}{2+2i}$ est	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
3	Si $\frac{\pi}{6}$ est un argument de z alors un argument de $\frac{i}{\overline{z}^2}$ est	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
4	Si $z=-\sqrt{3}+2e^{i\frac{\pi}{6}}$, alors la forme exponentielle de z est :	$e^{i\frac{\pi}{2}}$	$2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$	$2\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}$	$\left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$
5	Si z et z' sont deux nombres complexes tels que $\lvert z\rvert=2$ et $z'=z-\frac{1}{\overline{z}}$ alors $\lvert z'\rvert=$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
6	$\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^{2015}=$	1	i	-1	2015

EXERCICE 2 (4 POINTS)

On considère la suite (U_n) définie pour $n\in\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0=\frac{1}{3} \\ U_{n+1}=\frac{U_n}{3U_n+1} \end{cases}$

1° Calculer U_1 et U_2.

2° Montrer, par récurrence, que (U_n) est positive.

3° Montrer que la suite (U_n) est décroissante. Que peut-on déduire ?

4° On pose $V_n=\frac{1}{U_n}$

a- Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.

b- Exprimer V_n en fonction de n, en déduire U_n en fonction de n.

c- Calculer, en fonction de n, $S_n=\frac{1}{U_0}+\frac{1}{U_1}+...+\frac{1}{U_n}$.

EXERCICE 3 (6 POINTS)

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2+6z+25=0 \qquad (E)$$

1. Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 solutions de (E) tels que $\mathrm{Im}(z_1)\succ 0$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

   Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=z_1-6i$, $z_B=z_2+4$ et $z_C=-1+2i$.

   Placer les points A, B et C dans le repère.

   a- Déterminer la nature du triangle ABC.

   b- Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABDC$ soit un parallélogramme.
3. Pour tout nombre $z\neq 3$, on pose : $f(z)=\dfrac{z+3+2i}{z-3}$.

   a- Calculer le nombre $\alpha=f(5-6i)$ puis l'écrire sous forme algébrique et trigonométrique.

   b- Déterminer Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)|=1$.

   c- Déterminer Γ_2 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1|=\sqrt{10}$.
4. Pour tout n, on pose $z_n=\alpha^n$ (où α est le nombre calculé à la question **3.a-**) et soit M_n le point d'affixe z_n.

   a- Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels le point M_n appartient à l'axe des abscisses.

   b- Que peut-on dire des points M_{2014} et M_{2016} ?

EXERCICE 4 (5 POINTS)

La suite (U_n) est définie par $U_0=1$ et pour tout entier naturel n, par $U_{n+1}=\dfrac{1}{2}U_n+n-1$.

1. **a-** Calculer les termes U_1, U_2 et U_3.

   b- Justifier que la suite (U_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. **a-** Démontrer que pour tout $n\geq 3$, on a $U_n\geq 0$.

   b- En déduire que pour tout $n\geq 4$, on a $U_n\geq n-2$.

   c- En déduire la limite de la suite (U_n).
3. On définit la suite (V_n) par $V_n=4U_n-8n+24$.

   a- Démontrer que (V_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.

   b- Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_n=7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+2n-6$.

   c- Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_n=x_n+y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.

   d- En déduire l'expression de la somme $S_n=U_0+U_1+...+U_n$ en fonction de n.

Présentation et rédaction : 2 points

Fin.