DEVOIR DE MATHS

Niveau : 7D	*Durée : 4h*	*Proposé le 09 Mai 2015 de 8h à 12h*

Exercice 1 (4 points)

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée.

On considère une suite (U_n), définie sur $\mathbb{N}$, croissante et de termes strictement positifs.

On définit alors la suite (V_n) sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \frac{-1}{U_n}$.

a) Si $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$, alors (V_n) est convergente.

b) Si (U_n) est divergente, alors (V_n) est divergente.

c) Si (U_n) est minorée par 5, alors (V_n) est minorée par -1.

d) La suite (V_n) est croissante et négative.

e) Les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

f) Si (U_n) est géométrique, alors (V_n) est géométrique.

g) Si (U_n) est arithmétique, alors (V_n) est arithmétique.

h) La suite (U_n) est minorée .

***Bonus : 2 points, (note maximale 20) :** Proposer une démonstration pour la réponse indiquée dans l'exercice 1 ;(proposition vraie ou fausse). Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple.*

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $z^2-2z+5=0$ et $z^2-6z+10=0$

2) Pour tout nombre complexe z tel que $z\neq 1+2i$ on pose : $f(z)=\frac{z-3-i}{z-1-2i}$.

a) Calculer le nombre $\alpha = f(1+3i)$ puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.

b) On considère les deux points A et B d'affixes respectives $z_A = 1+2i$ et $z_B = 3+i$.

Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles Γ_k des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

Γ_1 tel que $|f(z)|=1$. **Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.**

Γ_3 tel que $f(z)$ soit réel. **Γ_4 tel que $|f(z)-1|=\sqrt{5}$.**

3) Déterminer et représenter dans le repère précédent le point C tel que le quadrilatère OABC soit un parallélogramme.

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=x+1+e^x$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1.a) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Calculer et donner une interprétation graphique de : $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x+1))$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

2. Dresser le tableau de variation de f .

3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α puis vérifier que $-1,3<\alpha<-1,2$.
5. Construire les courbes (C) et (C') représentant respectivement la fonction f et sa réciproque f^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
6.a) Déterminer la primitive F de f qui vérifie : $F(0)=0$.
b) Soit $A(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation respectives $x=\alpha$ et $x=0$.
Calculer $A(\alpha)$ en fonction de α. Montrer que $A(\alpha)=\frac{4-\alpha^2}{2}$.
7.a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0=\alpha$.
b) Vérifier que : $(f^{-1})'(0)=\frac{-1}{\alpha}$.

Exercice 4 (7 points)

Partie A
Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x(1+\ln x)-2\ln x$.
1) Calculer $g'(x)$. Vérifier que si $x<1$, alors $g'(x)<0$ et si $x>1$, alors $g'(x)>0$.
2) Déterminer les variations de g (On ne demande pas de calculer les limites aux bornes de $]0,+\infty[$).
3) En déduire que $g(x)\geq 1$ pour tout x de $]0,+\infty[$.

Partie B
On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$.
1.a)Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
b) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$.
c) Dresser le tableau de variation de f.
2.a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera. On note (C') la courbe de f^{-1} dans le même repère.
b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α puis vérifier que $0,4<\alpha<0,5$.
3. a) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe C_f en son point d'abscisse 1.
b) Déterminer les points de C_f où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=x$.
4) On considère la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=x-1-\ln x$.
a) Calculer $h'(x)$ et montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $h(x)\geq 0$.
b) Montrer que $f(x)-x=(\ln x-1)h(x)$. En déduire la position relative de C_f et (T)
c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.
d) Tracer (T) et C_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
e) Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m ; le nombre de solutions de l'équation $1-m-x(1-\ln x)-(\ln x)^2=0$.
5.a) En utilisant une intégration par parties, calculer $I_1=\int_1^e x\ln x\,dx$ et $I_2=\int_1^e(\ln x)^2dx$.
b) Calculer l'aire du domaine plan limité par les courbes (C) et (C') et les droites $x=1$ et $x=e$.

Fin.