DEVOIR DE SYNTHESE

Niveau : 7C | *Durée :4H* | *Proposé le 04 février 2017 de 8h à 12h*

Exercice 1 (3 points)

Soit $\alpha\in[0,\pi]$ et (E_α) l'équation dans $\mathbb{C}$ définie par : $z^2-i(2\sin\alpha+1)e^{-i\alpha}z-2(\sin\alpha)e^{-2i\alpha}=0$.

1° a) Calculer le discriminant $\Delta(\alpha)$ et vérifier que $\Delta(\alpha)=\left[i(2\sin\alpha-1)e^{-i\alpha}\right]^2$.

b) En déduire les deux solutions de (E_α) .telles que $|z'|=1$ et z'' l'autre solution.

c) Mettre z' et z'' sous forme exponentielle.

2°) Calculer l'intégrale $I=\int_0^\pi|\Delta(\alpha)|d\alpha$

Exercice 2 (3 points)

On se propose dans cet exercice de calculer, par deux méthodes différentes, l'intégrale $I=\int_2^3\sqrt{-x^2+6x-8}\,dx$

1)On pose $g(x)=\sin x$ avec $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle que l'on déterminera et montrer que $(g^{-1})'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) Calculer la dérivée de la fonction H définie par : $H(x)=(x-3)\sqrt{-x^2+6x-8}+g^{-1}(x-3)$.

c) En déduire le calcul de l'intégrale $I=\int_2^3\sqrt{-x^2+6x-8}\,dx$.

2) En posant $x=3+\cos t$, recalculer I et comparer avec les résultats précédents.

Exercice 3 (4 points)

On considère l'équation $(E):109x-226y=1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1° a) Déterminer le PGCD de 109 et 226 . Que peut-on conclure pour l'équation (E) ?

b) Donner une solution particulière de (E). Déterminer alors l'ensemble des solutions de (E).

c) En déduire qu'il existe un unique entier naturel d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel e tels que $109d=1+226e$. On précisera les valeurs de d et e .

2° Montrer que 227 est premier.

3° On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que $a\le 226$.

On considère les deux fonctions f et g définies de A dans A de la manière suivante :

$f(a)=r$ où r est le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227 et $g(a)=r'$ où r' est le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a) Vérifier que $g\circ f(0)=0$.

b) Justifier que, quelque soit l'entier non nul a de A, $a^{226}\equiv 1\ [227]$.

c) En déduire que, quelque soit l'entier non nul a de A, $g[f(a)]=a$.

Que peut-on dire de $f[g(a)]$?

Exercice 4 (4 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$

1° On donne dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E_θ) : $z^3+2ie^{i\theta}z^2-2ie^{2i\theta}z-4e^{3i\theta}(2+i)=0$ avec $\theta\in[0,2\pi[$.

a) Vérifier que (E_0) pour $(\theta=0)$ admet une solution réelle à déterminer.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_0).

2° a) Montrer que z est une solution de (E_θ) si et seulement si $ze^{-i\theta}$ est solution de (E_0)

b) En déduire les solutions (E_θ).

3° On note A, B et C les images des solutions de (E_0) avec $z_A \in \mathbb{R}$, $|z_B| < |z_C|$ et A', B' et C' celles des solutions de (E_θ).

a) Calculer puis interpréter les complexes $\dfrac{z_A}{z_B - z_C}$ et $\dfrac{z_B}{z_C - z_A}$.

b) Caractériser l'application r de P dans P qui à tout point $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que $z' = e^{i\theta}z$

c) En déduire que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même orthocentre.

d) Montrer que les points A', B' et C' varient sur des cercles concentriques à préciser.

<u>**Exercice 5 (6 points)**</u>

Soit la f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$

1° a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Montrer que le point $I(0,1)$ est un centre de symétrie de (C).

c) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point I.

d) Tracer la courbe (C) et la droite $\Delta : y = x$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2° a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,2[$.

b) Montrer que l'expression de $f^{-1}(x)$ sur $]0,2[$ est : $f^{-1}(x) = \dfrac{2(x-1)}{1-(x-1)^2}$.

c) Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le repère précédent.

3° On considère la fonction g définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = f(\tan x)$ pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$.

a) Montrer que g est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Montrer que l'expression de g sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est : $g(x) = 1 + \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.

c) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle à déterminer.

d) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[1,2]$ et que $\left(g^{-1}\right)'(x) = \dfrac{2}{1+(x-1)^2}$.

e) Montrer que $\forall x \in [1,2]$ $g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\dfrac{2}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

4° On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} g^{-1}\left(1 + \dfrac{1}{n+k}\right)$ et $v_n = \dfrac{u_n}{n+1}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g^{-1}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) \le g^{-1}\left(1+\dfrac{1}{n+k}\right) \le g^{-1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

En déduire que (v_n) est convergente et donner sa limite.

b) Soit $t_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} g^{-1}\left(\dfrac{2(n+k)}{1+n+k}\right)$. Déduire que (t_n) est convergente et donner sa limite.

Fin.