DEVOIR DE MATHS

Niveau : 7C	*Durée :4h*	*Proposé le 11 Février 2018 de 8h à 12h*

Exercice 1 : (3 points)

On considère les équations dont les inconnues sont des entiers $(E): 35u-96v=1$ et $(F): x^{35}\equiv 2\ [97]$.

1° a) En appliquant le test de primalité vérifier que 97 est un nombre premier. **0.25 pt**

b) Montrer que le couple $(11;4)$ est solution de l'équation (E) . **0.25 pt**

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E). **0.5 pt**

2° Soit x une solution de l'équation (F).

a) Prouver que les nombres x et 97 sont premiers entre eux. **0.5 pt**

b) Montrer que $x^{96}\equiv 1\ [97]$ puis que $x\equiv 2^{11}\ [97]$ **1 pt**

3° Soit n un entier. Montrer que si $n\equiv 2^{11}\ [97]$ alors n est solution de (F). **0.25 pt**

4° Montrer que les solutions de (F) sont tous les entiers $x=11+97k;\ k\in\mathbb{Z}$ **0.25 pt**

Exercice 2 : (5 points)

On définit la suite (I_n) par $I_0=\int_0^1\sqrt{1-t^2}dt$ et $I_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}dt$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1° On pose $f(x)=\int_0^{\cos x}\sqrt{1-t^2}dt,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$. **1 pt**

b) Déterminer $f(x)$ pour $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ puis en déduire la valeur de I_0. **0.25 pt**

c) Interpréter graphiquement l'intégrale I_0 et retrouver sa valeur. **0.25 pt**

2° a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et minorée. Que peut-on en déduire ? **0.5 pt**

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $0\le I_n\le\frac{1}{n+1}$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. **0.5 pt**

3° a) Calculer I_1. **0.5 pt**

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$; $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+4}.I_n$ **0.5 pt**

c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$; $\frac{n+1}{n+4}\le\frac{I_{n+1}}{I_n}\le 1$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$ **0.5 pt**

4° a) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$; $I_n\times I_{n+1}=\frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$. **0.25 pt**

b) Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n}.I_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ **0.25 pt**

5° Montrer que $I_{2n}=\frac{(2n)!\ \pi}{2^{2n+2}n!(n+1)!}$ et en déduire l' expression de I_{2n+1}. **0.5 pt**

<u>Exercice 3</u> : (6 points)

Soit $f(z)=\dfrac{iz-1}{(z+1)^2}$**, pour tout** $z\in\mathbb{C}-\{1\}$

1° a) Montrer que l'équation $f(z)=z$ **admet une solution imaginaire pure** z_0 **1 pt**

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ **l'équation** $f(z)=z$**, soit** z_0, z_1 **et** z_2 **ses solutions avec** $\mathrm{Re}(z_0)=0$ **et** $\mathrm{Re}(z_2)<\mathrm{Re}(z_1)$**. 1 pt**

2° a) Montrer que $1+z_1=e^{i\frac{11\pi}{6}}$ **et** $1+z_2=e^{i\frac{7\pi}{6}}$**. 1 pt**

b) En déduire le module et un argument de chacun des complexes z_1 **et** z_2**. 1 pt**

3° Dans cette question on suppose que $z=e^{i\alpha}$ **avec** $0\le\alpha<\pi$**.**

a) Montrer que $\overline{f(z)}=iz.f(z)$ **0.5 pt**

b) Déterminer α **pour que** $f(z)$ **soit un imaginaire pur. 0.5 pt**

c) Ecrire $f(z)$ **sous forme exponentielle. 0.5 pt**

4° Déterminer z **tel que** $|z|=1$ **et** $\mathrm{Re}[f(z)]=\dfrac{1}{2}$**. 0.5 p**

<u>Exercice 4</u> : (6 points)

Soit f **la fonction définie sur** $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ **par** $f(x)=\dfrac{2\sin x}{1-\sin x}=\dfrac{2}{1-\sin x}-2$ **et** Γ **sa courbe représentative dans un repère orthonormé** $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$**.**

1° Dresser le tableau de variation de f**. 1.5 pt**

2° a) Montrer que f **admet une réciproque** g**. Déterminer** $g(0)$ **et** $g(1)$**. 1 pt**

b) Soit $h(x)=f(x)-x$**. Montrer que** $h''(x)=\dfrac{2(2+\sin x)}{(1-\sin x)^2}$**.**
En déduire le signe de $h'(x)$ **puis le signe de** $h(x)$ **1 pt**

c) En déduire la position relative de Γ **par rapport à la droite** Δ **d'équation** $y=x$**. 0.25 pt**

d) Tracer, dans le repère précédent les courbes Γ **et** Γ' **de** f **et** g**. 0.5 pt**

e) Montrer que g **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **et que** $g'(x)=\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$**. 0.75 pt**

3° Soit (u_n) **la suite définie par :** $u_0=2$ **et** $\forall n\in\mathbb{N}$ **;** $u_{n+1}=g(u_n)$

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ **;** $0\le u_n\le 2$**. 0.25 pt**

b) Montrer que (u_n) **est décroissante. En déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite. 0.5 pt**

4° Soit (v_n) **la suite définie pour tout** $n\in\mathbb{N}^*$ **par** $v_n=n\left[g\left(u_n+\dfrac{2}{n}\right)-g\left(u_n+\dfrac{1}{n}\right)\right]$**.**

On admet que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ **il existe** $c_n\in\left]u_n+\dfrac{1}{n},u_n+\dfrac{2}{n}\right[$ **tel que** $v_n=\dfrac{1}{(2+c_n)\sqrt{1+c_n}}$

Montrer que (v_n) **est convergente et calculer sa limite. 0.25 pt**

Fin