BAC BLANC

Niveau : 7C *Durée :4H* *Proposé le 22 mars 2017 de 8h à 12h*

Exercice 1 (3 points)

p est un nombre premier supérieur ou égal à 7. Le but de cet exercice est de montrer que l'entier naturel $n=p^4-1$ est divisible par 240 puis d'appliquer ce résultat.

1) Peut-on avoir $p \equiv 0\ [3]$? En analysant les autres cas modulo 3, démontrer que n est divisible par 3.

2) En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que : $p^2-1=4k(k+1)$
En déduire que p^2-1 est divisible par 8 puis que n est divisible par 16.

3) En raisonnant comme à la question 1) modulo 5, démontrer que 5 divise n.

4) Déduire des questions précédentes que 240 divise n.

5) Existe-t-il 15 nombres premiers $p_1,p_2,...,p_{15}$ supérieurs à 7, tels que l'entier $A=p_1^4+p_2^4+\cdots+p_{15}^4$ soit un nombre premier ?

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z)=z^3-(5+3i)z^2+(4+12i)z+4-12i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z)=(z-2i)(z^2+az+b).$$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

2) Soient les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $Im(z_A)<Im(z_B)<Im(z_C)$.

a) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;5),(B;-6),(C;-3)\}$.

b) Placer les points A,B ,C et G. Montrer que les points G, A, B et C sont cocycliques.

3) Pour tout réel $\lambda \neq 2$, on définit l'application f_λ du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'}=5\overrightarrow{MA}-6\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{MC}$.

a) Donner l'expression complexe de f_λ. Montrer que f_λ est une translation ou une homothétie.

b) Etudier l'application f_λ suivant les valeurs de λ. Caractériser f_{-3}.

5) Soit s la similitude directe qui transforme A en B et B en C.
Donner l'écriture complexe de s et déterminer son rapport et son centre.

Exercice 3 (6 points)

1) On considère la fonction numérique f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x\ln(x+1)-x\ln x, & x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

a) Montrer que f est continue à droite de zéro.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite de zéro. Donner une interprétation graphique.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. Interpréter graphiquement.

2.a) Vérifier que $f''(x)=\dfrac{-1}{x(x+1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe.

c) Calculer A_1 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ (On pourra utiliser une intégration par parties).

3) Pour tout entier naturel $n\geq 1$; on pose: $\begin{cases} f_n(x)=x^n\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right), & x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$ et $A_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (A_n).

b) Montrer que pour tout $x\in[0,1]$, on a $0\leq x^{n-1}f(x)\leq x^{n-1}$ où f est la fonction définie dans la question 1).

c) Justifier que $0\leq A_n\leq\dfrac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n$.

4) On pose $I_n=\int_0^1 x^n\ln(x+1)dx$.

a) En utilisant une intégration par parties, calculer $I_1=\int_0^1 x\ln(x+1)dx$.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_{n+1}=\dfrac{2\ln 2}{n+2}-\dfrac{1}{(n+2)^2}-\dfrac{n+1}{n+2}I_n$.

5) Soit n un entier naturel, $n\geq 1$. g_n la fonction définie par : $\begin{cases} g_n(x)=-x^n\ln x; & x>0 \\ g_n(0)=0 \end{cases}$

a) Montrer que la fonction g_n est continue sur [0;1].

b) Soit G_n la fonction définie sur [0;1] par :

$$\begin{cases} G_n(t)=-\dfrac{t^{n+1}\ln t}{n+1}+\dfrac{t^{n+1}}{(n+1)^2}; & t>0 \\ G_n(0)=0 \end{cases}$$

Montrer que G_n est une primitive de g_n sur [0;1].

c) En déduire la valeur de $J_n=\int_0^1 g_n(t)dt$ en fonction de n. Vérifier que $J_1=\dfrac{1}{4}$.

d) En utilisant 4.a) et 5.c) retrouver la valeur de A_1 calculée en 1.c), puis calculer A_2.

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=(1+x)e^{-x}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Vérifier que : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ et interpréter graphiquement.

2) Dresser le tableau de variation de f et représenter sa courbe (C).

3) Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\dfrac{(1+x)^n e^{-x}}{n!}$ où n est entier naturel non nul.

Montrer que pour tout $x\in[-1;0]$ on a : $0\leq f_n(x)\leq\dfrac{e}{n!}$.

4) Soit la suite (I_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $I_n=\int_{-1}^0 f_n(x)dx=\int_{-1}^0\dfrac{(1+x)^n e^{-x}}{n!}dx$.

a) Calculer I_1 et donner une interprétation graphique .

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $I_{n+1}=I_n-\dfrac{1}{(n+1)!}$.

5) Soit la suite (U_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $U_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $I_n=e-U_n$.

b) Démontre que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $0\leq I_n\leq\dfrac{e}{n!}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

Fin.