DEVOIR DE MATHS

Niveau : 7C *Durée :4H* *Proposé le 24 mai 2017 de 8h à 12h*

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z)=z^3-(6+5i)z^2+(1+20i)z+14-5i$ où z est un nombre complexe.

a) Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution imaginaire pure.

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

2) On considère les points A,B et C d'affixes respectives $z_A=i$, $z_B=4+i$ et $z_c=2+3i$. Pour tout point M du plan on pose $\phi(M)=3MA^2-2MB^2+MC^2$ et Γ_k l'ensemble des points M tels que $\phi(M)=k$, où k est un réel.

a) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;3),(B;-2),(C;1)\}$

b) Vérifier que $\phi(G)=-44$ puis discuter suivant les valeurs de k, la nature de Γ_k.

c) Déterminer et construire Γ_{56}.

3) Soit f l'application qui à tout point $M(x,y)$ d'affixe z associe le point $M'(x',y')$ d'affixe z' tel que : $z'=\frac{3z-\bar{z}}{4}$;($\bar{z}$ est le conjugué de z) et soit Γ le cercle d'équation $(x+3)^2+(y-2)^2=50$.

a) Ecrire x' et y' en fonction de x et y.

b) Donner une équation cartésienne de l'ensemble Γ' image du cercle par l'application f.

c) Montrer que Γ' est une ellipse dont on déterminera le centre, les sommets et l'excentricité.

d) Représenter Γ et Γ' sur la figure précédente.

Exercice 2 (5 points)

On se propose dans cet exercice de calculer la limite de la suite numérique de terme général $U_n=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}, n\geq 2$.

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^2-2\ln x$.

1) Dresser le tableau de variation de f et vérifier que f est strictement décroissante sur $]0,1]$.

2) Soit $\lambda\in\mathbb{R}^*$; On pose $I(\lambda)=\int_\lambda^1 f(x)dx$.

a) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_\lambda^1 \ln x dx$.

b) En déduire le calcul de $I(\lambda)$ puis $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} I(\lambda)$.

3. Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$; $k\in\mathbb{N}$ tel que $1\leq k\leq n$ on pose : $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$.

a) Montrer que : $\frac{1}{n}f(\frac{k+1}{n})\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt\leq\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$; pour $1\leq k\leq n-1$.

b) En déduire que : $S_n-\frac{1}{n}f(\frac{1}{n})\leq I(\frac{1}{n})\leq S_n$ puis que : $I(\frac{1}{n})\leq S_n\leq I(\frac{1}{n})+\frac{1}{n}f(\frac{1}{n})$.

c) En utilisant 2.b) et 3.b) montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{7}{3}$.

4.a) Montrer que : $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)=\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) En déduire que : $S_n=\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}-2\ln U_n$. Déduire de ce qui précède $\lim_{n\to+\infty}U_n$.

Exercice 3(5 points)

1.a)Trouver la solution générale de l'équation différentielle $y''-2y'+y=0$.

b) Donner la solution particulière dont la courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ admet la droite d'équation $y=x$ comme tangente à l'origine O.

2) Soit la fonction paramétrique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=x^ne^x$. n est un entier naturel $n\geq 1$.

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes que l'on déterminera.

b) Etudier les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}).

3.a) Etudier la fonction $f(x)=f_1(x)=xe^x$ et dresser son tableau de variation. Tracer la courbe (C_1).

b) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_1) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

4) On considère la suite numérique (I_n) définie pour tout entier naturel $n\geq 1$ par $I_n=(-1)^n\int_0^1 x^ne^xdx$.

a) Montrer que $I_1=-1$

b) Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 1$, $\frac{1}{n+1}\leq|I_n|\leq\frac{e}{n+1}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty}I_n$.

c) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n\geq 1$:

$$I_{n+1}=(-1)^{n+1}e+(n+1)I_n .$$

d) En déduire le calcul de l'intégrale $J=\int_0^1\frac{(2x^3+5x^2-x-4)e^x}{x+1}dx$. Donner la valeur de J sous la forme $ae+b$ où a et b sont des entiers relatifs.

Exercice 4 (5 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct ABC de centre O et de coté a,$(a>0)$. Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes (on prendra (AB) horizontale).

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme B en C et J en K. Caractériser r_1.

c) Soit la rotation r_2 qui transforme B en C et K en J. Préciser le centre et un angle de r_2.

2.a) Soit $f=r_1\circ r_2$ et $g=r_2\circ r_1$. Caractériser f et g.

b) Montrer que $g\circ f=t_{\overrightarrow{BC}}$ où $t_{\overrightarrow{BC}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

c) Pour tout point M du plan on note $f(M)=M_1$ et $g(M)=M_2$. Montrer que les quadrilatères MBM_1A et MCM_2A sont des parallélogrammes.

3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme B en I et C en J. Déterminer l'angle et le rapport de s.

b) Déterminer s(A) et s(O).

c) Caractériser la composée $h=r_1\circ s$.

4) Soit Γ l'ellipse de foyers I et J passant par C.

a) Montrer que $K\in\Gamma$.

b) Construire les sommets de Γ. Justifier la construction.

5) On muni le plan d'un repère orthonormé direct $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$ tel que Ω est le milieu de $[IJ]$ et $\overrightarrow{\Omega I}=\frac{1}{4}a\vec{u}$ où a est la longueur du coté du triangle ABC.

a) Donner une équation cartésienne de Γ dans le repère $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$.

b) Montrer que l'excentricité de Γ est $e=\frac{1}{2}$.

Fin.