جمعية أصدقاء الرياضيات

ASSOCIATION DES AMIS DE MATHEMATIQUES

Bac Blanc **Epreuve de Maths**

Niveau : 7D	*Durée :4h*	*Proposée le 27 décembre 2019 de 8h à 12h*

Exercice 1 : (4 points)

Dans cet exercice, pour chaque proposition, indiquer avec justification, si elle est vraie ou fausse.

Bonne réponse avec justification : 0,5 point ;
Bonne réponse sans justification : 0,25 point ;
Mauvaise réponse ou pas de réponse: 0 point.

1. La forme algébrique du nombre complexe $z=\frac{14-2i}{3-4i}$ est $z=2+2i$.
2. Si $\arg z=\frac{\pi}{4}$, alors le nombre complexe $\frac{1+i}{\overline{z}}$ est imaginaire pur.
3. Si $z=3i(\cos\theta-i\sin\theta)$, alors on a $z=3e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$
4. Si $z=2+i(4-3i)$, alors la partie imaginaire du nombre complexe z est $4i$.
5. Le nombre $Z=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2020}$ est réel.
6. Si (U_n) est une suite arithmétique telle que $U_1=12$ et $U_3=20$, alors sa raison est $r=4$.
7. Si (U_n) est une suite géométrique positive telle que $U_0=2$ et $U_2=18$, alors sa raison est $q=9$.
8. Toute suite numérique positive et décroissante est bornée.

Exercice 2 (4 points)

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2+6z+25=0 \qquad (E)$$

1) Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 solutions de (E) tels que $\mathrm{Im}(z_1)>0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=z_1-6i$, $z_B=z_2+4$ et $z_C=-1+2i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABDC$ soit un parallélogramme.

3) Pour tout nombre $z\neq 3$, on pose : $f(z)=\frac{z+3+2i}{z-3}$.

a) Calculer le nombre $\alpha=f(5-6i)$ puis l'écrire sous forme algébrique et trigonométrique.

b) Déterminer Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)|=1$.

c) Déterminer Γ_2 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1|=\sqrt{10}$.

Exercice 3 (5 points)

On considère les suites numériques (U_n) et (V_n) définies pour tout n de IN^* par:

$$\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{n+1}{3n} U_n \end{cases} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{n} U_n .$$

1.a) Calculer U_2 , U_3, V_1, V_2.

b) Vérifier que $U_4 = \frac{4}{9}$.

2.a) Montrer par récurrence que la suite (U_n) est positive.

b) Montrer que (U_n) est décroissante. Que peut-on déduire ?

3.a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique convergente.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. Recalculer alors U_2 et U_3.

4.a) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = \frac{U_1}{1} + \frac{U_2}{2} + \frac{U_3}{3} + \cdots + \frac{U_n}{n}$.

b) Soit $P_n = V_1 \times V_2 \times V_3 \times \ldots \times V_n$. Montrer que $P_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n-3)}{2}}$

c) Soit $Q_n = U_1 \times U_2 \times U_3 \times \ldots \times U_n$. Calculer Q_n en fonction de n.

Exercice 4 (7 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z) = z^3 - (2+6i)z^2 - 11z - 8 + 6i$

a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $Z = 32i$.

b) Calculer $P(2i)$.

c) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$

d) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $(E) : P(z) = 0$.

2) Soient A , B et C les points d'affixes respectives : $z_A = -1$; $z_B = 2i$ et $z_C = 3+4i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

c) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que le nombre $\frac{z-2-2i}{z-2i}$ soit imaginaire pur.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = (z_D)^n$ et soit M_n le point d'affixe z_n.

a) Ecrire z_n sous forme exponentielle. Montrer que le nombre z_{2020} est réel.

b) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a $OM_n \geq 2020$.

4) Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison et son premier terme.

b)On pose $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \ldots + M_nM_{n+1}$. Calculer S_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Fin.