BAC BLANC	EPREUVE DE MATHS	
	Classes :7D	Durée : 4H 30/03/2018

Exercice 1 (3 points)

Pour tout entier naturel n on pose : $U_n = 2^{2n+1} + 4n - 6$ et $V_n = 2^{2n+1} - 2n + 3$;
$a_n = U_n - V_n$ et $b_n = U_n + 2V_n$.

1.a) Calculer a_0, a_1, b_0 et b_1.

b)Montrer que (a_n) est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme et la raison

c) Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison

2) On pose pour tout entier naturel n : $c_n = \ln b_n$.

a) Déterminer la nature de la suite (c_n) et la caractériser .

b) Soit $S_n = c_0 + c_1 + \dots + c_n$. Vérifier que S_n peut s' écrire sous la forme $S_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$ où α, β et γ sont des réels à déterminer.

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2}{x(x^2-1)}$

1)a) Déterminer les réels a ,b et c tels que : $\forall x>1$; $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$

b) En déduire une primitive F de f sur $]1;+\infty[$

c) Calculer l' intégrale $I=\int_2^3 f(x)\,dx$ *et* montrer que $I=\ln(\frac{32}{27})$

2) Montrer que :$\forall x \geq 2$ on peut écrire f(x) sous la forme $f(x)= \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x+1)}$.

3) On pose $\forall n \geq 2$, $S_n = f(2)+ f(3) +f(4)+...+f(n)$.

a)Montrer que : $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}$.

b) Simplifier la somme : $A = \frac{2}{1X2X3} + \frac{2}{2X3X4} + \frac{2}{3X4X5} + \cdots + \frac{2}{2016X2017X2018}$

Exercice 3 (5 points)

Dans l' ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose :

$$P(z) = z^3 - (5+6i)z^2 + (-4+14i)z + 8 - 8i$$

1.a) calculer P(1)

b) Déterminer les complexes a et b tel que : $P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$

c) Résoudre l'équation P(z)=0

2) Dans le plan complexe muni d' un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les quatre points A,B , C et D tels que : $Z_A = 2i$, $Z_B = 1$, $Z_C = 4 + 4i$ et D le quatrième sommet du parallélogramme ABCD.

a) Déterminer Z_D et placer les points A, B , C et D.

b) Calculer $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ et interpréter ce résultat.

3) Pour tout nombre $z \neq 1$, on pose : $f(z) = \frac{Z-4-4i}{Z-1}$

a) Déterminer est construire l' ensemble Γ_1 des points M(z) tels que : $|f(z)| = 1$

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M(z) tels que : $|f(z) - 1| = 5$

4)Soient les points M_n d' affixes $Z_n = (Z_C)^n$; $(n \geq 1)$

a) Pour quelles valeurs de n les points M_n sont situés sur l' axe (Ox) ?

b) Déterminer n pour que $OM_n > 2018$.

Exercice 4(8 points)

Partie A

On considère la fonction g définie par : $\forall x > 0$, $g(x) = x^4 + 2 - 4\ln x$.

1) Calculer $\lim_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

2.a) Calculer g'(x).

b) Dresser le tableau de variations de g .

3) En déduire que $\forall x > 0$, $g(x) > 0$.

Partie B

Soit la fonction f définie par : $\forall x > 0$; $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{2\ln x}{x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2 cm.

1.a) Montrer que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

2.a) Montrer que $\forall x > 0$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

b) Dresser le tableau de variations de f .

3.a) Montrer que f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.

b) Montrer que l' équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$ et vérifier que $0,8 < \alpha < 0,9$

c) Déterminer l' équation de la tangente (T) à la courbe (C)au point d'abscisse $x_0 = 1$.

4.a) Dresser le tableau de variations de f^{-1}.

b) Calculer $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$.

c) Déterminer l'équation de la tangente (T') à la courbe (C') représentative de f^{-1} au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

d) Tracer dans le même repère (T), (T'), (C) et (C') .

5. a)En utilisant une intégration par parties, calculer $I_1 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$.

b) En déduire l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Fin.