SERI D'EXERCICES
(Barycentre)

Exercice 1.
On considère un triangle ABC. On appelle I le milieu de [BC].
Démontrer que $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Exercice 2.
A et B sont deux points distincts. N est le point défini par la relation $\overrightarrow{NA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NB}$.
1) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.
2) Placer le point N sur une figure.
3) Exprimer N comme barycentre des points A et B.

Exercice 3.
ABCD est un parallélogramme de centre O. Les points M et N sont tels que :
$3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ……….. (1) et $\overrightarrow{CD} + 3\,\overrightarrow{DN} = \vec{0}$ ……….. (2).
1) En utilisant (1). Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Placer M.
2) Trouver les réels α et β pour que M soit barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β).
3) En utilisant (2). Exprimer $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Placer N.
4) Trouver les réels α ' et β ' pour que N soit barycentre des points pondérés (C, α ') et (D, β ').
5) Justifier que le quadrilatère NCMA est un parallélogramme et que O est le milieu de [MN].

Exercice 4.
ABC est un triangle. On note G le barycentre de (A, 2), (B, 1) et (C, 1). Le but de l'exercice est de déterminer la position précise du point G.
1) Soit I le milieu de [BC]. Démontrer que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.
2) En déduire que G est le barycentre de A et I munis de coefficients que l'on précisera.
3) Conclure.

Exercice 5.
1) Placer dans un repère les points A (1, 2), B (– 3, 4) et C (– 2, 5).
Soit G le barycentre des points pondérés (A, 3), (B, 2) et (C, – 4).
2) Quelles sont les coordonnées de G ? Placer G.
3) La droite (BG) passe t-elle par l'origine du repère ? Justifier.

Exercice 6.
ABC est un triangle. Soit G le barycentre de (A, 1), (B, 3) et (C, – 3).
Démontrer que les droites (AG) et (BC) sont parallèles.

Exercice 7.
ABC est un triangle. On considère le barycentre A' de (B, 2) et (C, – 3), le barycentre B' de (A, 5) et (C, – 3) ainsi que le barycentre C' de (A, 5) et (B, 2).
Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.
<u>Indication</u> : on pourra considérer le barycentre G de (A, 5), (B, 2) et (C, – 3).

Exercice 8.
Soit ABC un triangle et G un point vérifiant : $\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Le point G est-il barycentre des points pondérés (A, 5), (B, 1) et (C, 3) ? Justifier.

Exercice 9.
ABCD est un quadrilatère et G est le barycentre de (A, 1), (B, 1) (C, 3) (D, 3).
Construire le point G et expliquer votre construction.

Exercice 10.
Dans le triangle ABC, E est le milieu de [AB] et G est le barycentre de (A, – 2), (B, – 2), (C, 15).
Démontrer que G, C, et E sont alignés.

Exercice 11.
ABCD est un quadrilatère. On note G son isobarycentre. Le but de cet exercice est de préciser la position du point G.
1) On note I le milieu de [AC] et J le milieu de [BD]. Démontrer que G est le barycentre de I et J munis de coefficients que l'on précisera.
2) Conclure et faire une figure.
3) Si ABCD est un parallélogramme, préciser la position du point G.

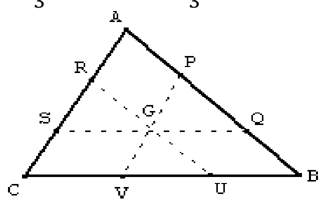
Prof : M^{ed}.Salem / Béye

SERI D'EXERCICES

(Barycentre)

Exercice 12.

ABC est un triangle de centre de gravité G.
On définit les points P, Q, R, S, U, V par :
$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BV} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$



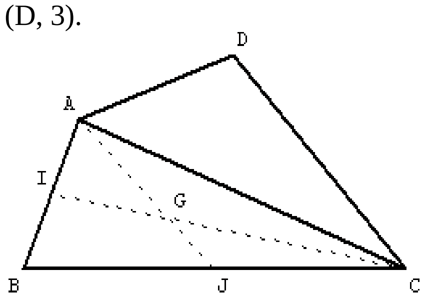
1) Démontrer que P est le barycentre de (A, 2) et (B, 1) et que V est barycentre de (C, 2) et (B, 1).
2) En déduire que G est le milieu de [PV].
3) On démontre, de même, que G est le milieu de [RU] et de [SQ]
4) Démontrer que RPUV est un parallélogramme.

Exercice 13.

ABC est le triangle donné ci-dessous. Y est le milieu de [BC].
1) Placer, en justifiant, le barycentre U de (A, 4) et (C, 1).
Puis placer le barycentre E de (A, 4) et (B, 1).
2) Soit G le barycentre de (A, 4), (B, 1) et (C, 1). Montrer que G est le barycentre de (E, 5) et (C, 1).
3) Démontrer que les droites (EC), (AY) et (BU) sont concourantes.

Exercice 14.

ABCD est un quadrilatère.
G est le centre de gravité du triangle ABC.
I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [BC].
L est le barycentre de (A, 1) et (D, 3).
K est le barycentre de (C, 1) et (D, 3).
Le but de l'exercice est de démontrer que
les droites (IK), (JL) et (DG) sont concourantes.
Pour cela, on utilise le barycentre H de (A, 1), (B, 1), (C, 1) et (D, 3).



1) Placer en justifiant, les points L et K.
2) Démontrer que H est le barycentre de G et D munis de coefficients que l'on précisera.
3) Démontrer que H est le barycentre de J et L munis de coefficients que l'on précisera.
4) Démontrer que H est le barycentre de I et K munis de coefficients que l'on précisera.
5) Conclure.

Exercice 15. (La droite d'Euler).

On considère un triangle ABC et A' le milieu de [BC]. On note O le centre du cercle circonscrit à ce triangle. On considère le point H défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ………… (1).
1) Montrer que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'}$ ………… (2).
2) En déduire des deux relations (1) et (2) que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.
3) En déduire que H appartient à la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
On admet, que de la même manière, on peut démontrer que le point H appartient aux deux autres hauteurs du triangle ABC.
4) Reconnaître le point H.
5) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
Montrer que O, G et H sont alignés et que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. .

Prof : M^{ed}.Salem / Béye