Corrigé de l'exercice 3

du devoir Amimaths 7C 04/02/2017

Par Moctar Baba Hamdi

Exercice 3

On considère l'équation $(E): 109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1° a) Déterminer le PGCD de 109 et 226. Que peut-on conclure pour l'équation (E) ?

b) Donner une solution particulière de (E). Déterminer alors l'ensemble des solutions de (E).

c) En déduire qu'il existe un unique entier naturel d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel e tels que $109d = 1 + 226e$. On précisera les valeurs de d et e.

2° Montrer que 227 est premier.

3° On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que $a \leq 226$.

On considère les deux fonctions f et g définies de A dans A de la manière suivante :

$f(a) = r$ où r est le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227 et $g(a) = r'$ où r' est le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a) Vérifier que $g \circ f(0) = 0$.

b) Justifier que, quelque soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1\ [227]$.

c) En déduire que, quelque soit l'entier non nul a de A, $g[f(a)] = a$.

Que peut-on dire de $f[g(a)]$?

Corrigé

$$109x - 226y = 1 \quad (E)$$

1. a) Déterminons le $PGCD$ de 109 et 226 :

On utilise l'algorithme d'Euclide (division de $a = 226$ par $b = 109$) :

$$226 = 2 \times 109 + 8$$
$$109 = 13 \times 8 + 5$$
$$8 = 1 \times 5 + 3$$
$$5 = 1 \times 3 + 2$$
$$3 = 1 \times 2 + 1$$

Donc : $\boxed{PGCD(109, 226) = 1}$

Et par suite (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}$.

b) Recherche d'une solution particulière de (E) En utilisant l'algorithme d'Eclude :

$226 = 2 \times 109 + 8$	$a = 2b + 8$	$8 = a - 2b$
$109 = 13 \times 8 + 5$	$b = 13(a - 2b) + 5$	$5 = 27b - 13a$
$8 = 1 \times 5 + 3$	$a - 2b = 27b - 13a + 3$	$3 = 14a - 29b$
$5 = 1 \times 3 + 2$	$27b - 13a = 14a - 29b + 2$	$2 = 56b - 27a$
$3 = 1 \times 2 + 1$	$14a - 29b = 56b - 27a + 1$	$\boxed{1 = 41a - 85b}$

Vérification : $41a - 85b = 41 \times 226 - 85 \times 109 = 9266 - 9265 = 1$.

Donc : $109 \times (-85) - 226 \times (-41) = 1$, d'où le couple $(-85, -41)$ est une solution particulière de (E).

Résolution de (E) :

Si (x, y) est une solution générale de (E), alors : $109x - 226y = 1$.

Et comme : $109 \times (-85) - 226 \times (-41) = 1$. Alors par soustraction :

$$109(x + 85) - 226(y + 41) = 0$$

$$\Rightarrow 109(x + 85) = 226(y + 41) \quad (*)$$

Donc 226 divise $109(x + 85)$.

Or $PGCD(109, 226) = 1$, alors d'après le théorème de Gauss 226 divise $(x + 85)$.

Donc il existe un entier relatif k tel que : $x + 85 = 226k$, c'est-à-dire :

$$x = 226k - 85$$

En injectant cette valeur de x dans la relation $(*)$, on obtient :

$$109 \times 226k = 226(y + 41)$$

Ce qui implique que :

$$y = 109k - 41$$

Réciproquement :

Si $x = 226k - 85$ et $y = 109k - 41$ avec k un entier relatif, alors :

$$109x - 226y = 109 \times 226k - 109 \times 85 - 226 \times 109k - 226 \times (-41) = 1$$

Et ainsi l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{S = \{(226k - 85, 109k - 41) ; k \in \mathbb{Z}\}}$$

c) Déduisons qu'il existe un unique entier naturel d inférieure ou égal à 226 et un unique entier naturel e tels que $109d = 1 - 226e$:

<u>Unicité :</u>

Si d est un entier naturel inférieure ou égal à 226 et e est un entier naturel tels que $109d = 1 + 226e$, alors (d, e) est une solution de (E) et donc il existe un entier relatif k tel que :

$$\begin{cases} d = 226k - 85 \\ e = 109k - 41 \end{cases}$$

Et donc :

$$\begin{cases} 0 \leq 226k - 85 \leq 226 \\ 0 \leq 109k - 41 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{85}{226} \leq k \leq 1 + \frac{85}{226} \\ k \geq \frac{41}{109} \end{cases}$$

La seule valeur possible de l'entier k est 1. Et donc :

$$\boxed{\begin{cases} d = 141 \\ e = 68 \end{cases}}$$

D'où l'unicité.

<u>Existence :</u>

Si $d = 141$ et $e = 68$, alors d est un entier naturel inférieure ou égal à 226 et e est un entier naturel tels que $109d = 15369 = 1 + 15368 = 1 + 226e$.

2. Montrons que 227 est premier :

On sait que $\sqrt{227} = 15,06$ et que 227 n'est pas divisible à aucun des nombres $2, 3, 5, 7, 11$ et 13 : nombres premiers inférieures à $\sqrt{227}$. Donc 227 est premier.

3. $A = \{a \in \mathbb{N}; a \leq 226\}$

f: $\begin{matrix} A \to A \\ a \mapsto r \end{matrix}$ où r est le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.

g: $\begin{matrix} A \to A \\ a \mapsto r' \end{matrix}$ où r est le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a) vérifions que $g \circ f(0) = 0$:

On sait que $0^{109} = 0$ divisible par 227, donc $f(0) = 0$.

Et que $[f(0)]^{141} = 0$ divisible par 227, donc $g[f(0)] = 0$.

Ainsi :

$$\boxed{g \circ f(0) = 0}$$

b) Justifions que, quel que soit l'entier a non nul de A, $a^{226} \equiv 1 \quad [227]$

Si a est un entier non nul de A, alors a n'est pas divisible par le nombre premier 227 (car $0 < 1 \leq a \leq 226 < 227$). Donc a et 227 sont premiers entre eux. Donc d'après Fermat :

$$a^{226} \equiv 1 \quad [227]$$

c) Déduisons que, quel que soit l'entier a non nul de A, $g[f(a)] = a$

Si a est un entier non nul de A, alors :

$$a^{226} \equiv 1 \quad [227]$$

$$\Rightarrow (a^{226})^e \equiv 1 \quad [227]$$

$$\Rightarrow a^{226e} \equiv 1 \quad [227]$$

$$\Rightarrow a \times a^{226e} \equiv a \quad [227]$$

$$\Rightarrow a^{1+226e} \equiv a \quad [227]$$

$$\Rightarrow a^{109d} \equiv a \quad [227]$$

$$\Rightarrow (a^{109})^{141} \equiv a \quad [227] \quad (1)$$

Or :

$$a^{109} \equiv f(a) \quad [227]$$

$$\Rightarrow (a^{109})^{141} \equiv [f(a)]^{141} \quad [227] \quad (2)$$

(1) et (2) montrent que :

$$[f(a)]^{141} \equiv a \quad [227]$$

Et comme $a \in A$, donc a est le reste de la division euclidienne de $[f(a)]^{141}$ par 227. Ce qui signifie que : $\boxed{g[f(a)] = a}$

Le même raisonnement permet aussi de montrer que :

$$\boxed{f[g(a)] = a}.$$