Série d'exercices :Les fonctions

Exercice 1:

f est la fonction définie sur ℝ par f : x $\longmapsto$ 2x².

a) Calculer les images par f des réels 0; $\sqrt{2}$ et –4.

b) Vérifier que $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ ont pour image 4.

c) Pourquoi –4 n'est-il l'image d'aucun réel ?

Exercice 2:

Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=(x-3)(x+1)$

1/ Quelles sont les images par f de 2 et de –10 ?

2/ Quels sont les antécédents de 0 par f ?

3/ Les points de coordonnées (–1 ; 3) , (0 ; –3) et (1 ; 0) sont-ils des points de la représentation graphique de f ?

Exercice 3:

f est la fonction définie sur ℝ par: f : x $\longmapsto$ x² + 3x + 1

a) Calculer les images par f des réels 0; 1; $-\sqrt{3}$ et $\frac{1}{2}$.

b) Trouver tous les réels qui ont pour image 1 par f.

Exercice 4:

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction x $\longmapsto$ x² ?

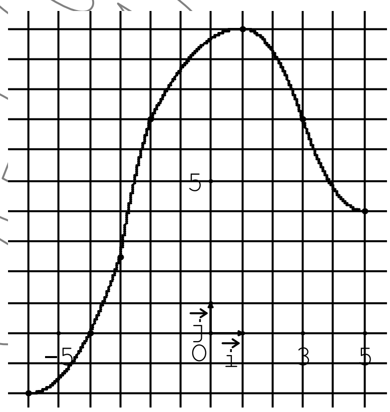
b) Quel est le réel pour lequel on ne peut pas calculer $\frac{1}{x}$? Donner alors l'ensemble de définition de la fonction x $\longmapsto \frac{1}{x}$.

c) Quels sont les réels pour lesquels on peut calculer $\sqrt{x}$? Donner alors l'ensemble de définition de la fonction x $\longmapsto \sqrt{x}$.

Exercice 5 :

Soit f la fonction représentée ci-contre.

1. Donner l'ensemble de définition.
2. a) Lire l'image de 3 par f ; f(1) ; f(-4) ; f(-2) et f(5).
   b) Lire les antécédents de 7 par f.
   c) Lire les antécédents de 0 par f.

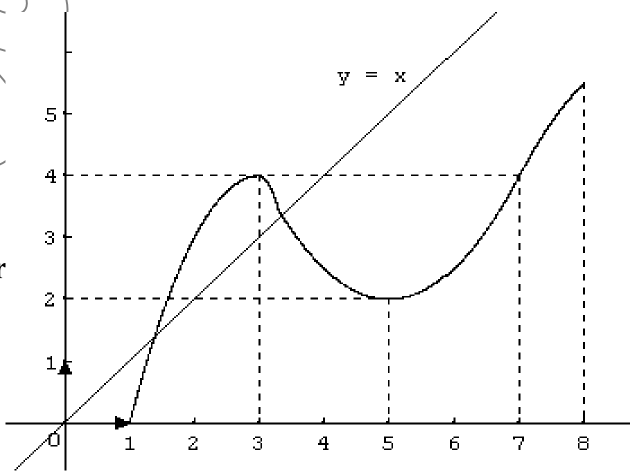


Exercice 6:

On a représenté ci-contre :

- la droite d'équation y = x,
- la courbe représentative d'une fonction f définie sur [1 ; 8].

(Les questions posées seront résolues par lecture graphique).



1.Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes :

n°	Affirmation	vrai ou faux
1.	1 a pour image 0 par la fonction f	
2.	0 a pour image 1 par la fonction f	
3.	7 est un antécédent de 4 par la fonction f	
4.	3 est un antécédent de 4 par la fonction f	
5.	f(3) = 4	
6.	f(2) = 5	
7.	f(3) > f(5)	
8.	2,5 a trois antécédents par la fonction f	
9.	0,5 a un seul antécédent par la fonction f	
10.	L'équation f(x) = 3 a au moins une solution dans l'intervalle [1 ; 8]	
11.	L'équation f(x) = x a au moins une solution dans l'intervalle [1 ; 8]	
12.	f est croissante sur l'intervalle [1 ; 8]	
13.	Si x appartient à l'intervalle [4 ; 5], alors f(x) ≤ x	
14.	Si a et b appartiennent à l'intervalle [3 ; 5] et si a < b, alors f(a) < f(b)	

2. Résoudre graphiquement l'inéquation : f(x) – f(3) > 0. On donnera la solution sous forme d'un intervalle.

Exercice 7:

Soit la fonction numérique définie par $f(x) = x^2 - 3x + 2$ sur I = [–2 ; 5].

1/ Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
f(x)															

2/ Placer les points de coordonnées (x ; f(x)) dans un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) en prenant comme unité 1 cm. Tous ces points appartiennent à la représentation graphique de f . La tracer en joignant ces points.

3/ Déterminer le minimum de la fonction f ainsi que la valeur pour laquelle il est atteint.

4/ Résoudre graphiquement l'inéquation f(x) ≤ 0.

Exercice 8 :

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle [-5 ; 7].

x	-5	-4	2	3	7
variation de f	-2 ↗	0 ↗	3 ↘	0 ↘	-1

1. **Dessiner une courbe susceptible de représenter la fonction f.**
2. **Combien de solutions a l'équation f(x) = 0 ? Donner ces solutions.**
3. **Indiquer le signe de f(x).**

Exercice 9:

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [–5 ; 5] par f(x) = $\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+4}$ Compléter un tableau donnant les images par f (arrondies à 10^{-2} près) des réels allant de –5 à 5 par pas de 0,5. Placer les points correspondants dans un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) puis tracer la représentation graphique de f.

Exercice 10:

On considère les fonctions numériques f et g définies par : $f(x) = -x^2 + 2x$ et $g(x) = 2x - 1$

1/ a) Donner une table de valeurs de f pour x allant de –2 à 3.

b) Tracer sur un même graphique (unité 1 cm ou 1 carreau) les courbes représentatives de f et g que l'on notera C_f et C_g.

2/ Résoudre graphiquement en expliquant :

a) l'équation : $f(x) = g(x)$.

b) l'inéquation : $f(x) < 0$.

3/ Déterminer graphiquement le maximum de la fonction f.

Exercice 11 :

Dans cet exercice, f(x) est définie par une expression algébrique. Dans chaque cas, préciser l'ensemble de définition de f.

a) $f(x) = 2x^2 + 1$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2x} + 3x$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

d) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$ e) $f(x) = \dfrac{1}{(x-4)(x+1)}$ f) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

g) $f(x) = \dfrac{-2}{x^2+1}$ h) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

Exercice 12:

Déterminer si les fonctions f suivantes définies sur l'ensemble D sont paires, impaires ou ni l'un ni l'autre.

a) $D = [-3 ; 3]$ $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ b) $D = [-3 ; 5]$ $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$

c) $D = \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ d) $D = [-4 ; 4]$ $f(x) = \dfrac{3}{x+5}$

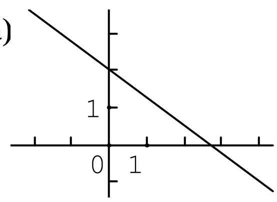
e) $D = \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ f) $D = \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x^2+x+4}$

g) $D = \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$ $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$

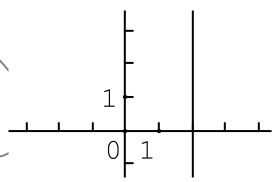
Exercice 13 :

Pour chacune des courbes ci-dessous, indiquer si c'est celle d'une fonction , et dans ce cas, préciser son ensemble de définition.

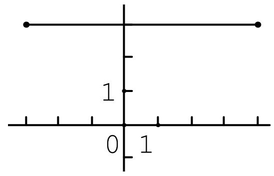
a)



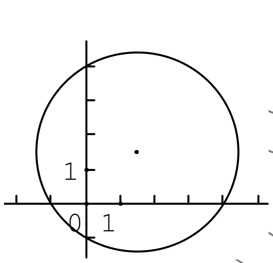
b)



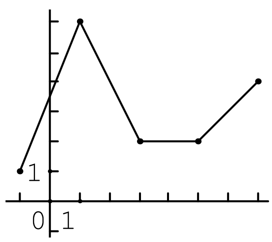
c)



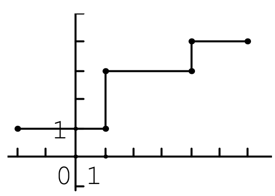
d)



e)



f)



Exercice 14 :

ABC est un triangle isocèle en A avec : AB = AC = 10 cm. H est le pied de la hauteur issue de A. On se propose d'étudier les variations de l'aire du triangle lorsqu'on fait varier la longueur x (en cm) du côté [BC].

1. a) Calculer la valeur exacte de l'aire de ABC lorsque x = 5, puis lorsque x = 10.

b) Peut-on avoir x = 30 ? Pourquoi ? Dans quel intervalle varie x ?

2. a) Exprimer AH en fonction de x.

b) On désigne par f(x) l'aire de ABC. Démontrer que : $f(x) = \frac{x}{4}\sqrt{400 - x^2}$.

c) Calculer f(x) pour chacune des valeurs entières de x prises dans [0 ; 20] .arrondir les résultats au dixième et les présenter dans un tableau.

d) Dans un repère orthogonal bien choisi, placer les points de coordonnées (x ; f(x)) du tableau précédent. puis construire la courbe représentative de f.

Exercice 15 :

ABCD est un trapèze rectangle de base AD = 6 cm, CB = 2 cm, de hauteur AB = 4 cm. H est le projeté orthogonal de C sur [AD]. Un point M décrit le segment [AB] et on pose AM = x. La parallèle à (AD) passant par M coupe [CD] en N et la parallèle à (AB) passant par N coupe [AD] en P.

1. a) Démontrer que le triangle CHD est un triangle rectangle isocèle.

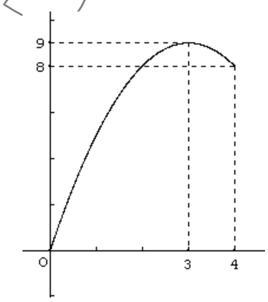
b) Démontrer que AMNP est un rectangle et NPD un triangle rectangle isocèle.

2. On appelle f(x) l'aire du rectangle AMNP lorsque x décrit l'intervalle [0 ; 4].

a) Montrer que $f(x) = x(6 - x)$ et vérifier que $f(x) = 9 - (x - 3)^2$.

b) Compléter le tableau suivant :

longueur AM, x	0	1	2	2,5	3	4
aire de AMNP, f(x)						



3. Le graphique ci-contre est la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ sur l'intervalle [0 ; 4].

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

a) Lorsque $AM = \frac{1}{4}AD$, quelle est l'aire de AMNP ?

b) Pour quelle position de M l'aire du rectangle AMNP semble-t-elle maximale ?

c) Sur quel segment faut-il choisir le point M pour que l'aire du rectangle soit supérieure ou égale à 8 cm² ?

d) Vérifier qu'il existe deux points M pour lesquels l'aire du rectangle est égale à $\frac{17}{2}$ cm².

4. Répondre aux questions suivantes en choisissant pour f(x) l'expression la mieux adaptée.

a) Démontrer que $f(x) \leq 9$. Peut-on affirmer cette fois que l'aire du rectangle est maximal lorsque x = 3 ? Quelle est la nature de AMNP lorsque x = 3 ?

b) Démontrer que l'aire du rectangle AMNP est égale à $\frac{17}{2}$ cm² lorsque $x = \frac{6-\sqrt{2}}{2}$ ou $\frac{6+\sqrt{2}}{2}$.

Bonne Chance.