

**Série d'exercices : Calculs dans IR**

**Exercice 1:**

1. Quel nombre faut-il ajouter au numérateur de la fraction  $\frac{2}{3}$  pour obtenir l'inverse de  $\frac{2}{3}$  ?
2. Quel nombre faut-il ajouter au numérateur et au dénominateur de la fraction  $\frac{2}{3}$  pour obtenir l'opposé de  $\frac{2}{3}$  ?
3. Mettre les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles :

$$a = \frac{5}{6} + 1 - \frac{10}{4} + \frac{2}{3} \qquad b = \frac{2 + \frac{1}{3}}{\frac{3}{7} \times \frac{28}{27}} \qquad c = \frac{10^{-4} \times (10^3)^2}{10^3} \qquad d = \frac{18 \times 15}{27 \times 25} - \frac{3}{25}$$

**Exercice 2:**

Simplifier l'écriture des rationnels suivants, puis indiquer lesquels sont des décimaux :

$$a = \frac{2^3 \times 3^2 \times 5^3}{2^2 \times 3 \times 5^4} \qquad b = \frac{7^{-2} \times 3 \times 11^{-3}}{7^{-3} \times 3^2 \times 11^{-2}} \qquad c = \frac{2^3 \times 10^{-4} - 3^2 \times 10^{-3}}{41 \times 10^{-3}}$$

$$d = \frac{2}{\sqrt{33}} \left( \frac{\sqrt{363}}{\sqrt{2}-1} \right) \qquad e = \frac{3\sqrt{360} - 2\sqrt{180}}{\sqrt{10} - \sqrt{2}} \qquad f = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2}$$

**Exercice 3:**

Pour chacun des nombres suivants, simplifier l'écriture puis, en déduire le plus petit ensemble ( $\mathbb{N}$ ;  $\mathbb{Z}$ ;  $\mathbb{D}$ ;  $\mathbb{Q}$  ou  $\mathbb{R}$ ) auquel il appartient :

$$A = \frac{(1-\sqrt{3})^2}{2-\sqrt{3}} ; \quad B = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}-\sqrt{8}} ; \quad C = \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} ; \quad D = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{20}-\sqrt{45}}{\sqrt{180}} ; \quad E = \left( \sqrt{4-\sqrt{12}} - \sqrt{4+\sqrt{12}} \right)^2$$

**Exercice 4:**

1. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , le réel  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$  est l'inverse du réel  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ .
2. En déduire la valeur de  $A = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}} - \dots + \dots - \frac{1}{\sqrt{2015}-\sqrt{2014}}$

**Exercice 5:**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

$$|x+3| = \frac{1}{2} \quad ; \quad \left| x - \frac{2}{3} \right| \leq 4 \quad ; \quad \left| \frac{2x-3}{7} \right| \leq 1 \quad ; \quad \left| -3x + \frac{1}{5} \right| \geq 2$$

**Exercice 6:**

Simplifier les expressions suivantes en montrant les étapes de simplification :

$$A = \frac{10^9 \times 6^3}{25^4 \times 3 \times 2^{14}} \quad ; \quad B = \frac{1}{10^{118}} - \frac{1}{10^{119}} \quad ; \quad C = 5^{108} \times 2^{106} \times 11 \times \frac{1}{10^{107}}$$

**Exercice 7:**

Simplifiez les expressions suivantes...

$$A = (2^3 \times 2^{-4})^2 \times (3^3)^2 \times 3^{-5}$$

$$B = 2^3 \times 2^4 \times 2^{-5}$$

$$C = (2^3 \times 3^2)^2$$

$$D = \left( \frac{2}{3} \right)^2 \times 3^3$$

$$E = \left( -\frac{1}{3} \right)^2 \times 5^{-2} \times \left( \frac{3}{5} \right)^3$$

$$F = \left( \frac{2}{7} \right)^4 \times \left( \frac{7}{4} \right)^2 \times \left( \frac{-49}{2} \right)^3$$

$$G = \left( \frac{2}{3} \right)^{-2} \times \left( \frac{3}{4} \right)^4 \times \left( \frac{27}{4} \right)^{-1}$$

**Exercice 8:**

Simplifiez les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{27} + 2\sqrt{75} - \sqrt{108} & E &= \sqrt{175} - \sqrt{448} + \sqrt{63} & I &= \sqrt{36} - 3\sqrt{6} + 5\sqrt{144} \\
 B &= \sqrt{256} \times \sqrt{121} + \sqrt{144} & F &= 4\sqrt{80} - 3\sqrt{180} + 3\sqrt{45} & J &= \sqrt{\frac{45}{7}} \times \sqrt{\frac{26}{30}} \times \sqrt{\frac{27}{13}} \\
 C &= 3\sqrt{169} + \sqrt{361} - 3\sqrt{256} & G &= 2\sqrt{32} + 3\sqrt{18} - 3\sqrt{50} & K &= \sqrt{99} - \sqrt{539} + \sqrt{44} \\
 D &= 2\sqrt{44} - \sqrt{99} + 2\sqrt{275} & H &= \sqrt{\frac{8}{9}} \times \sqrt{\frac{12}{25}} \times \sqrt{\frac{225}{24}} & L &= \sqrt{7} - 3\sqrt{49} + 5\sqrt{9}
 \end{aligned}$$

**Exercice 9:**

On considère les suites suivantes

- 1<sup>o</sup>) 1;4;7;10;13.....
- 2<sup>o</sup>) 1;3;4;6;7;9;10;12.....
- 3<sup>o</sup>)  $1; \frac{2}{3}; \frac{5}{6}; \frac{11}{12}; \frac{23}{24}$ .....

- Pour la suite 1<sup>o</sup>) donner le 10<sup>ème</sup> terme.
- Pour la suite 2<sup>o</sup>) donner le 9<sup>ème</sup> terme.
- Pour la suite 3<sup>o</sup>) donner le 7<sup>ème</sup> terme.

**Exercice 10:**

1. Ecrire sans valeur absolue :  $\left| 3 - \pi \right| + \left| \frac{4}{\pi} - 1 \right| + \left| \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right|$ .

2. Soit  $x$  et  $y$  deux réels tels que:  $1 < y < 2$  et  $3 < y < 5$

Donner un encadrement d'ordre 2 pour  $\frac{x}{y+4}$  ;  $\frac{x+2}{x+1}$  et  $\frac{y+1}{y-1}$ .

3. Calculer  $A = \frac{\frac{1}{\frac{101}{\frac{10101}{\frac{101}{1}}}}}{\frac{10101}{101}}$ .

**Exercice 11: (Le nombre d'or)**

1. Le réel  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  est-il solution de l'équation  $x^2 - x - 1 = 0$  ?

2. a. Montrer que :  $\alpha^2 = \alpha + 1$ .  
 b. En déduire que:  $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \alpha}}}}}}$

3. a. Montrer que :  $\frac{1}{\alpha} = \alpha - 1$ .

4. b. En déduire que :  $\alpha = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}}}}$

**Exercice 12:**

Étant donnée un entier naturel  $n$  on pose :  $p = n(n + 3)$ .

- 1. Exprimer le produit  $(n + 1)(n + 2)$  en fonction de  $p$ .
- 2. Exprimer le produit  $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$  en fonction de  $p$ .
- 3. En déduire que lorsqu'on augmente de 1 le produit de quatre entier consécutifs, on obtient un carrée parfait.

**4. Application numérique**

De quel nombre entier, le nombre :  $24 \times 25 \times 26 \times 27 + 1$  est-il le carrée?  
 et :  $2012 \times 2013 \times 2014 \times 2015 + 1$  ?

