BAC 2014 SM

Noms: Assiya, Lalle,

Nom = lalle mint lenaye.

Bac 2014 SN.

Exercice ③ :

① $f(x) = x\ln(1+\frac{1}{x})$, $f(0)=0$, $x>0$

$D_f = [0,+\infty[$.

a) on a : $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\frac{x+1}{x})$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln(x+1) - \ln x)$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln(x+1) - x\ln x)$

$= 0-0 = 0$.

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ d'où : f est continue à droite en 0.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x\ln(1+\frac{1}{x}) - 0}{x-0}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x\ln(1+\frac{1}{x})}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(1+\frac{1}{x}) = +\infty$

f n'est donc pas dérivable à droite en 0 et la courbe $\mathcal{C}$ de f admet au point d'abscisse, une demi-tangente verticale.

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \overset{\nearrow +\infty}{x} \overset{\nearrow 0}{\ln(1+\frac{1}{x})}$ F.I.

on pose $t = \frac{1}{x}$

Alors $\lim\limits_{x\to +\infty} t = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$. et $x = \frac{1}{t}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

Donc : $y=1$ A.H à $\mathcal{E}_f$ au voisinage de $+\infty$.

② a). $\forall x>0$, $f(x) = x\ln(1+\frac{1}{x})$

$\Rightarrow f'(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) + x\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)$

$= \ln(1+\frac{1}{x}) + x(\frac{-1}{x^2})(\frac{x}{x+1})$

$= \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}$.

$\Rightarrow f''(x) = \frac{-1/x^2}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$.

$= (\frac{-1}{x^2})(\frac{x}{x+1}) + \frac{1}{(x+1)^2}$.

$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$.

$= \frac{-\cancel{x} - 1 + \cancel{x}}{x(x+1)^2}$

$\Rightarrow f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$.

on a $f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0, \forall x>0$

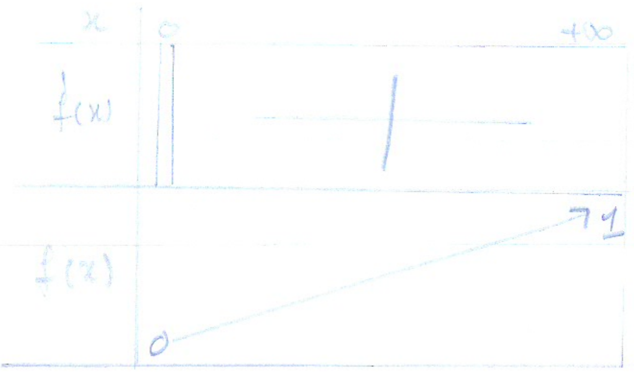
Donc f' est $\searrow$ sur $]0,+\infty[$.

or : $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1})$

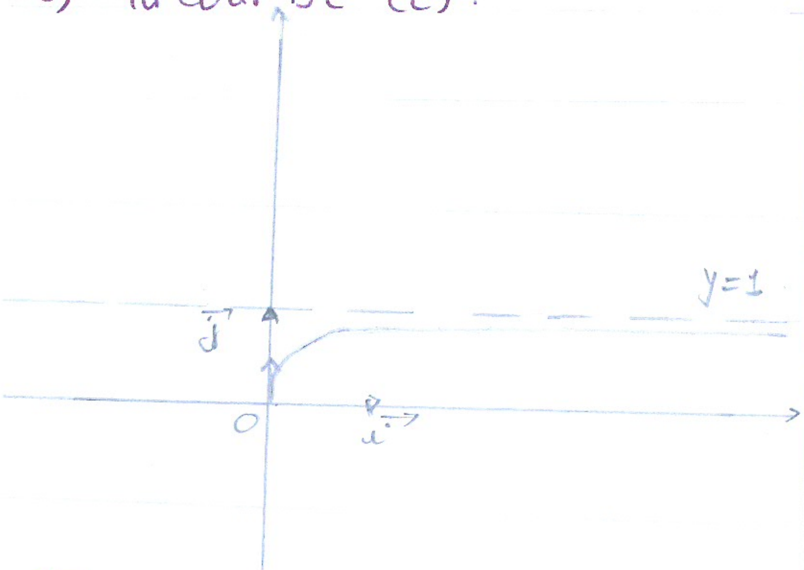
$= 0-0 = 0$.

d'où $\forall x>0$, $f'(x) > 0$.

b) T.V de f :



c) la courbe (C) :



③ a) pour que A_n existe il suffit que f_n soit continue sur $[0;1]$.

Sur $]0;1]$, $f_n(x) = x^n \ln(1+\frac{1}{x})$ est le produit des deux fonction $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \ln(1+\frac{1}{x})$ continues sur $]0;1]$ d'où f_n est continue sur $]0;1]$.

Etudions la continuité de f_n à droite en 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln(1+\frac{1}{x})$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln(\frac{x+1}{x}) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^n(\ln(x+1) - \ln x)$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} (x^n \ln(x+1) - x^n \ln x) = 0-0$

$= 0 = f_n(0)$.

D'où f_n est continue à droite en 0. donc : f_n est continue sur $[0;1]$ et l'integrale $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ existe et cette écriture définit bien une suite numérique (A_n).

b) D'après le T.V de la fonction f définie dans la question 1) on a : $\forall x \geq 0$ $0 \leq f(x) < 1$ D'où en multipliant par x^{n-1} on a : $\forall x \in [0;1]$.

$0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$.

c) $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

or : $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = x^{n-1} f(x)$

d'où $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq f_n(x) \leq x^{n-1}$

donc : $0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 x^{n-1}\,dx$

d'où $0 \leq A_n \leq \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1$

Donc : $\forall n \geq 1,\ 0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}$

or : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

d'où d'après le T.G $\lim_{n\to+\infty} A_n = 0$.

II a) $I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 x^n \ln x\,dx$.

on pose : $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^n \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \end{cases}$

$I_n(\alpha) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_\alpha^1$

$= 0 - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2}$

$I_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha - \frac{1}{(n+1)^2}$

b) $\lim_{\alpha\to0^+} I_n(\alpha) = \lim_{\alpha\to0^+}\left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$= \lim_{\alpha\to0^+}\left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^n}{n+1}(\alpha\ln\alpha) - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$= 0 - 0\times0 - \frac{1}{(n+1)^2}$

$\lim_{\alpha\to0^+} I_n(\alpha) = \frac{-1}{(n+1)^2}$

c) $J_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)\,dx$.

on pose : $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \ln(x+1) \end{cases}$

alors $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \end{cases}$

on obtient $v(x)$ en utilisant une I.P.P.

$J_{n+1} = \left[x^{n+1}\left((x+1)\ln(x+1) - x\right)\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n\left((x+1)\ln(x+1) - x\right)d$

$= 2\ln2 - 1 - 0 - (n+1)\int_0^1 (x^{n+1} + x^n)\ln(x+1)\,dx + (n+1)\int_0^1 x^{n+1}\,dx$.

$= 2\ln2 - (n+1)\int_0^1 \left(x^{n+1}\ln(x+1) + x^n\ln(x+1)\right)dx + (n+1)\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 -$

$= 2\ln2 - (n+1)\left(\int_0^1 x^{n+1}\ln x\,dx + \int_0^1 x^n\ln(x+1)\,dx + (n+1)\left(\frac{1}{n+2} - 0\right) -\right.$

$= 2\ln 2 - (n+1)(J_{n+1} + J_n) +$

$\frac{n+1}{n+2} - 1$

Donc: $J_{n+1} = 2\ln 2 - (n+1) J_{n+1} -$

$(n+1) J_n - \frac{1}{n+2}$

$J_{n+1} + (n+1) J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} -$

$(n+1) J_n$

$(n+2) J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1) J_n$

d'où $J_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2} J_n$

Fin

Nom: Assiya / Med elmamoun / cherif
Belghassem

Ex$_2$

$f(x) = xe^x$

1_a

$Df = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} xe^x = 0^-$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \underset{+\infty}{x}\,\underset{+\infty}{e^x} = +\infty \cdot +\infty = +\infty$

$f'(x) = 1 \cdot e^x + xe^x = e^x + xe^x$
$= e^x(x+1)$

signe de $f'(x)$ est celui de $x+1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

T.V. de f

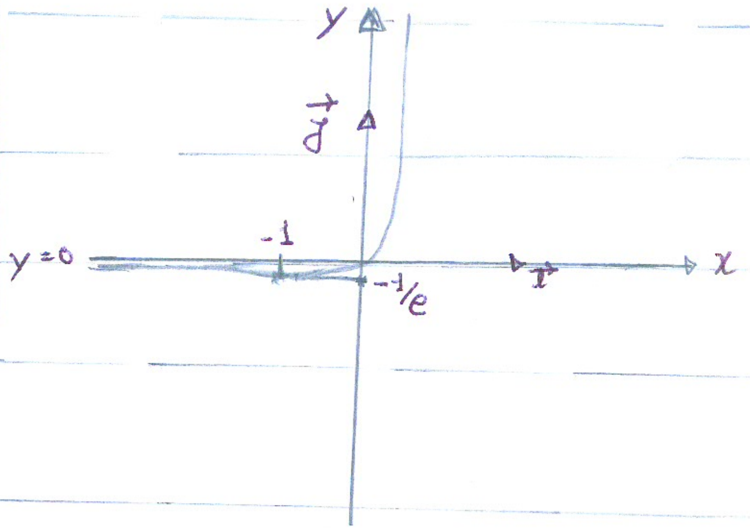
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

$y = 0$ AH à (C) au voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim \frac{xe^x}{x} = e^x = +$

C admet une B.P de direction (oy) au voisinage de $+\infty$

* $C \cap (y'y) : (0,0)$
* $C \cap (x'x) : (0,0)$



c) $f(x) = xe^x$, $f'(x) = (x+1)e^x$

$f''(x) = (x+2)e^x$, $y'' - 2y' + y = 0$

on remplace l'equation par f, f', f''

$f''(x) - 2f'(x) + f(x)$

$(x+2)e^x - 2(x+1)e^x + xe^x$

$(xe^x + 2e^x - 2xe^x - 2e^x + xe^x) = 0$

Donc f est une solution de l'equation differentielle $y'' - 2y' + y = 0$

d) $x = 0$, $x = 1$

$\int_0^1 f(x)\,dx$

{Suite Ex_2}

$\int_0^1 xe^x\,dx$

$\int_0^1 uv = [uv]_0^1 - \int_0^1 u'v$

on pose

$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

$\int_0^1 uv' = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x$

$(1e^1 - 0e^0) - (e^1 - e^0)$

$\cancel{e} - 0 - \cancel{e} + 1$

$A = 1\ ua$

2a- $I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x\,dx \quad n \geq 1$

$I_1 = (-1)^1 \int_0^1 xe^x\,dx$

$= -\int_0^1 xe^x\,dx$

$= -1$

$I_1 = -1$

. $I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x\,dx$

onc :

$|I_n| = |(-1)^n| \cdot \left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right|$

$= 1 \cdot \left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right|$

or $\forall x \in [0,1] \quad x^n e^x \geq 0$

D'où : $\int_0^1 x^n e^x\,dx \geq 0$

Donc : $\left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right| = \int_0^1 x^n e^x\,dx$

D'où : $|I_n| = \int_0^1 x^n e^x\,dx$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e$

$\Rightarrow x^n \leq x^n e^x \leq e \cdot x^n$

$\Rightarrow \int_0^1 x^n\,dx \leq \int_0^1 x^n e^x\,dx \leq e \int_0^1 x^n\,dx$

$\Rightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq |I_n| \leq e \cdot \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}$

or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

D'où d'après le T.G $\lim_{n\to+\infty} |I_n| = 0$

Donc : $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

c) $I_{n+1} = (-1)^{n+1} \cdot \int_0^1 x^{n+1} e^x\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$I_{n+1} = (-1)^{n+1}\left([x^{n+1} e^x]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx \right)$

{suite Ex 2}

$= (-1)^{n+1}\left(e - 0 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x dx\right)$

$= (-1)^{n+1} \cdot e - (-1)^{n+1}(n+1)\int_0^1 x^n e^x dx$

$= (-1)^{n+1} \cdot e - (-1)(-1)^n (n+1)\int_0^1 x^n e^x dx$

$= (-1)^{n+1} e + (n+1)(-1)^n \int_0^1 x^n e^x dx$

$\boxed{I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1) I_n}$

$\forall n \geq 1$

b)

d) $J = \int_0^1 \frac{(x^3+4x^2-3x-6)\, e^x}{x+1} dx$

	1	4	-3	-6
1	↓	-1	-3	6
	1	3	-6	0

$J = \int_0^1 \frac{(x^2+3x-6)\cancel{(x+1)}\, e^x}{\cancel{(x+1)}} dx$

$= \int_0^1 (x^2+3x-6)e^x dx$

$\int_0^1 x^2 e^x dx + 3\int_0^1 x e^x - 6\int_0^1 e^x dx$

$(-1)^2 \int_0^1 x^2 e^x dx - 3\times(-1)\int_0^1 x e^x dx - 6\,[e^x]_0^1$

$= I_2 - 3I_1 - 6(e-1)$

or : $I_1 = -1$ et $I_2 = (-1)^2 e + 2I_1$

$= e - 2$

D'où : $J = (e-2) - 3\times(-1) - 6(e-1)$

$= e - 2 + 3 - 6e + 6$

$\boxed{J = 7 - 5e}$