Bac 2014 SN

Nom : Boune Belkheir

N° 1414

Exercice 1

1) $P(2i) = (2i)^3 + (1-2i)(2i)^2 + (1-2i)(2i) - 2i =$

$-8i - 4(1-2i) + 2i(1-2i) - 2i = 0$

$= -8i - 4 + 8i + 2i - 4i - 2i = 0$

$\therefore$ $P(2i) = 0$

	1	$1-2i$	$1-2i$	$-2i$
$2i$	$\downarrow$	$2i$	$2i$	$2i$
	1	1	1	0

$\forall z \in \mathbb{C}$ $P(z) = (z - 2i)(z^2 + z + 1)$

$P(z) = 0 \Rightarrow (z - 2i)(z^2 + z + 1) = 0$

$\Rightarrow z = 2i$ ou $z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 \Rightarrow 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$

$z' = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$z'' = -\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$S_{\mathbb{C}} \left\{ 2i ; -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right\}$

$Im(2i) \geq Im\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \geq Im\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore$ $z_0 = 2i$; $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

2) a) On $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Soit $M(x, y)$

$M \in (BC) \Rightarrow \det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x + \frac{1}{2} & 0 \\ y - \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\sqrt{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow$

$x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$ $2x + 1 = 0$

b) $M \in (BC) \setminus \{B, C\} \Rightarrow z = -\frac{1}{2} + iy /$

$y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

or : $z' = \frac{1}{z^2 + z + 1} = \frac{1}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

D'où : $z' = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} + iy + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{(iy)^2 + \frac{3}{4}} \Rightarrow$

$= \frac{1}{-y^2 + \frac{3}{4}} \in \mathbb{R}$

3) a) $f(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z^2 + \bar{z}z + \bar{z}} =$

$\frac{\bar{z}}{(\bar{z}z)z + \bar{z}z + \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2 z + |z|^2 + \bar{z}}$

Donc si $|z| = 1$ alors $|z'|^2 = 1$

d'où $f(z) = \frac{\bar{z}}{z+1+\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}$

5) si $z = e^{i\theta}$ alors $\bar{z} = e^{-i\theta}$ et $|z| = 1$

Donc $f(z) = \frac{e^{-i\theta}}{1+e^{i\theta}+e^{-i\theta}} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

4) a) $M \in \mathcal{C}(0,1) \setminus \{B, C\} \Rightarrow$

$z = e^{i\theta}$ et $\cos\theta \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$z' = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ y' = \frac{-\sin\theta}{1+2\cos\theta} \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x'^2 + y'^2 = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{(1+2\cos\theta)^2} = \frac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \\ \text{et} \\ (2x'-1)^2 = \left(\frac{2\cos\theta}{1+2\cos\theta} - 1\right)^2 = \frac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \end{cases}$

D'où : $x'^2 + y'^2 = (2x'-1)^2$

b) $\Gamma : x^2 + y^2 = (2x-1)^2 \Rightarrow$

$x^2 + y^2 = 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow$

$3x^2 - 4x - y^2 = -1 \Rightarrow 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) - y^2 = -1$

$\Rightarrow 3\left[\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - \frac{4}{9}\right] - y^2 = -1$

$\Rightarrow 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{1/9} - \frac{y^2}{1/3} = 1$

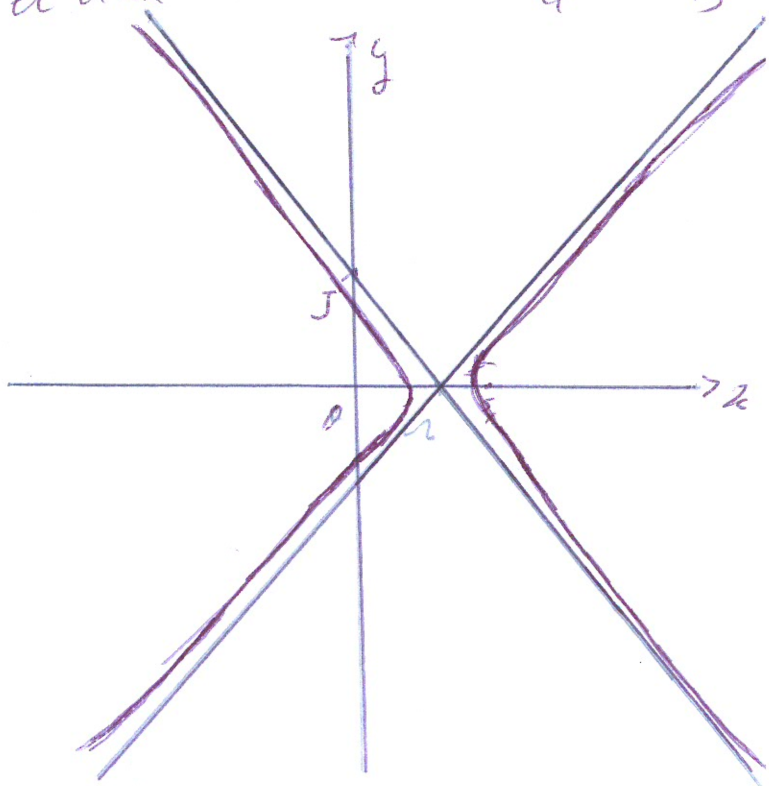
4) b) $\Gamma : \frac{(x - 2/3)^2}{(1/3)^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{3}/2)^2} = 1$

$\therefore \Gamma : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc Γ est une hyperbole de centre $\Omega\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ et de sommets :

$S_1\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}; 0\right) = (1; 0)$ et $S_2 : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}; 0\right) = \left(\frac{1}{3}; 0\right)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

et d'excentricité $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{2/3}{1/3} =$



Exercice 2 :

1) a) $f(x) = xe^x$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x+1$ $f'(x)=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow$ $x=-1$

T V de f

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

b) $y=0$ AH à (C) au voisinage de $-\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{x} =$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \Rightarrow$

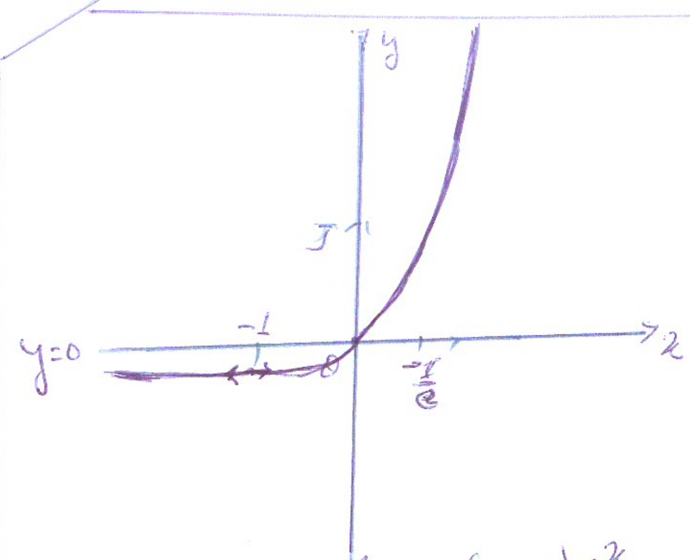
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

(C) admet une BP $//(y'y)$ au voisinage de $+\infty$

* $C \cap (y'y) : (0,0)$

$C \cap (x'x) : (0,0)$

d'où la courbe de (C)



c) $f(x) = xe^x$; $f'(x) = (x+1)e^x$

$f''(x) = (x+2)e^x$

$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = (x+2)e^x - 2(x+1)e^x + xe^x$

$= (x+2-2x-2+x)e^x = 0$

Donc f est une solution d'équation différentielle $y''-2y'+y=0$

d) L'aire du domaine plan limité par (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ est $A = \int_0^1 f(x)\,dx$

or: $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geq 0$

D'où $A = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{matrix}$

Alors:

$A = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx =$

$[xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = [(x-1)e^x]_0^1$

$A = 1$

2) a) $I_1 = (-1)^1 \int_0^1 x e^x dx$

or $\int_0^1 e^x x dx = 1$

D'où $I_1 = 1$

b) $I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x dx$

Donc : $|I_n| = |(-1)^n| \cdot \left|\int_0^1 x^n e^x dx\right|$

$= 1 \times \left|\int_0^1 x^n dx\right|$

or : $\forall x \in [0,1]$ $x^n e^n \geq 0$

D'où : $\int_0^1 x^n e^n dx \geq 0$

Donc $\left|\int_0^1 x^n e^x dx\right| = \int_0^1 x^n e^x dx$

D'où : $|I_n| = \int_0^1 x^n e^n dx$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e$

$\Rightarrow x^n \leq x^n e^x \leq e \cdot x^n$

$\Rightarrow \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq e \cdot \int_0^1 x^n dx$

$\Rightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq |I_n| \leq e \cdot \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\forall x \geq 1 \quad \frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}$

or : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

D'où d'après T.G $\lim_{n \to +\infty} |I_n| = 0$

Donc $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

$I_{n+1} = (-1)^{n+1} \cdot \int_0^1 x^{n+1} e^x dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$I_{n+1} = (-1)^{n+1}\left(\left[x^{n+1} e^x\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x dx\right)$

$= (-1)^{n+1}\left(e - 0 - (n+1)\int_0^1 x^n e^n dx\right)$

$= (-1)^{n+1} \cdot e - (-1)^{n+1}(n+1)\int_0^1 x^n e^x dx$

$= (-1)^{n+1} e - (-1)^{n+1}(n+1)\int_0^1 x^n e^n dx$

$= (-1)^{n+1} e - (-1)(-1)^n (n+1)\int_0^1 x^n e^n dx$

$= (-1)^{n+1} e + (n+1)(-1)^n \int_0^1 x^n e^n dx$

$I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1) I_n \quad \forall x \geq 1$

3) $J = \int_0^1 \frac{(x^3 + 4x^2 - 3x - 6)e^x}{x+1} dx$

	1	4	-3	-6
-1	↓	-1	-3	6
	1	3	-6	0

$\therefore J = \int_0^1 \frac{(x^2 + 3x - 6)(x+1)e^x}{x+1} dx$

$= \int_0^1 (x^2 + 3x - 6) e^x dx$

$= \int_0^1 x^2 e^x dx + 3\int_0^1 x e^x dx - 6\int_0^1 x e^x dx$

$= (-1)^2 \int_0^1 x^2 e^x dx - 3 \times (-1)\int_0^1 x e^x dx - 6[e^x]$

$= I_2 - 3I_1 - 6(e-1)$

or : $I_1 = -1$ et $I_2 = (-1)^2 e + 2I_1 = e - 2$

D'où : $J = (e-2) - 3(-1) - 6(e-1) =$

$e - 2 + 3 - 6e + 6$

$\therefore J = 7 - 5e$

Exercice 3 :

1) a) On a : $f(0)=0$ et

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) =$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\left(\ln(x+1)-\ln x\right) =$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x\ln(x-1)-x\ln x\right)=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

D'où f est continue à droite en 0

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x\ln(1+\frac{1}{x})}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0 et la courbe $\mathcal{C}$ de f admet au pt d'abscisse une demi-tangente verticale

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\ \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{0} = F.I$

On pose $t=\frac{1}{x}$

Alors $\lim\limits_{x\to +\infty} t = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

et $x=\frac{1}{t}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t}$

$=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$

Donc : $y=1$ A.H à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$

2) a) $\forall x>0,\ f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)$

$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{-1}{x(1+x)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2}$

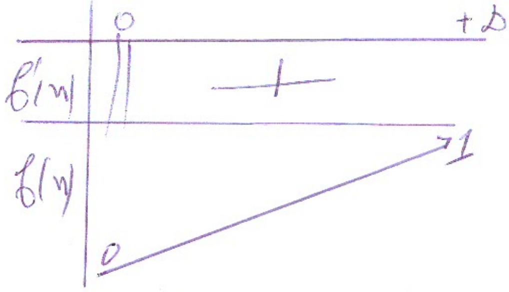
d'où : $f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$; $f''(x)<0\ \forall x>0$

Donc f' est ↘ sur $]0,+\infty[$

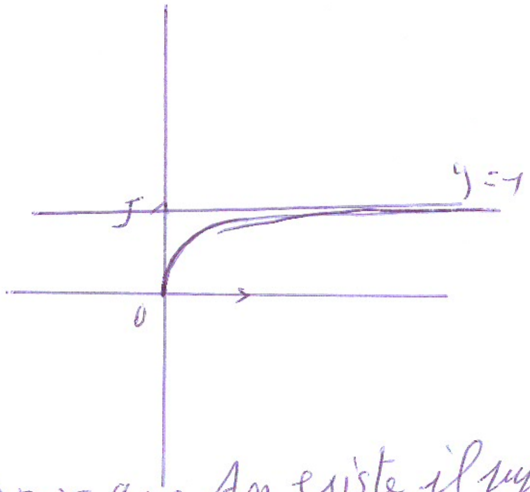
or : $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) = 0$

D'où : $\forall x>0,\ f'(x)>0$

TV de f



c)



3) a) pour que A_n existe il suffit que f_n soit continue sur $[0,1]$

Montrons que f_n est continue sur $[0,1]$

sur $]0,1]$ $f_n(x) = x^n\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est le produit des deux fonctions $x\mapsto x^n$ et $x\mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ continues sur $]0,1]$ d'où f_n est continue sur $]0,1]$

_ Etudions la continuité de f_n à droite en 0

$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} x^n \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$= \lim_{x\to 0^+} x^n \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} x^n(\ln(x+1) - \ln x) = \lim_{x\to 0^+}(x^n\ln(x+1) - x^n\ln x) = 0$

$= f_n(0)$

D'où : f_n est continue à droite en 0

Donc f_n est continue sur $[0,1]$

et l'~~intégration~~ intégrale

$A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ existe et cette écriture définit bien une suite numérique (A_n)

b) D'après le T.V de la fonction f définie dans la question 1) On a

$\forall x \geq 0 \quad 0 \leq f(x) < 1$

D'où : en multipliant par x^{n-1}

On a : $\forall x \in [0,1]$

$0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$

c) $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

or : $\forall x \in [0,1] \cdot f_n(x) = x^{n-1} f(x)$

D'où : $\forall x \in [0,1],\ 0 \leq f_n(x) < x^{n-1}$

Donc : $0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx < \int_0^1 x^{n-1}\,dx$

D'où : $0 \leq A_n \leq \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1$

Donc : $\forall n \geq 1,\ 0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}$

or : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

D'où d'après le T.G $\lim_{n\to+\infty} A_n = 0$

4) a) $I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 x^n \ln x\,dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$

$\therefore I_n(\alpha) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1}\int_\alpha^1 x^n\,dx$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1 =$

$0 - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2}$

$\therefore I_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha - \frac{1}{(n+1)^2}$

b) $\lim_{\alpha\to 0^+} I_n(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$= \lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^n}{n+1}(\alpha\ln\alpha) - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$= 0 - 0 \times 0 - \frac{1}{(n+1)^2}$

$\therefore \lim_{\alpha\to 0^+} I_n(\alpha) = -\frac{1}{(n+1)^2}$

c) $J_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)\,dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \ln(x+1) \end{cases}$ Alors

$\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \end{cases}$

On obtient $v(x)$ en utilisant une I.P.P

$\therefore J_{n+1} = \left[x^{n+1}((x+1)\ln(x+1) - x)\right]_0^1$

$-(n+1)\int_0^1 x^n((n+1)\ln(n+1)-x)\,dx$

$= -2\ln 2 - 1 - 0 - (n+1)\int_0^1 (x^{n+1}+x^n)\ln(x+1)\,dx$

$+(n+1)\int_0^1 x^{n+1}\,dx$

$=2\ln 2-(n+1)\int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)+x^n\ln(x+1)$

$+(n+1)\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 - 1 =$

$2\ln 2-(n+1)(J_{n+1}+J_n)+\frac{n+1}{n+2}-1$

$J_{n+1} = 2\ln 2-(n+1)J_{n+1}-(n+1)J_n-\frac{1}{n+2}$

$J_{n+1}+(n+1)J_{n+1}=2\ln 2-\frac{1}{n+2}-(n+1)J_n$

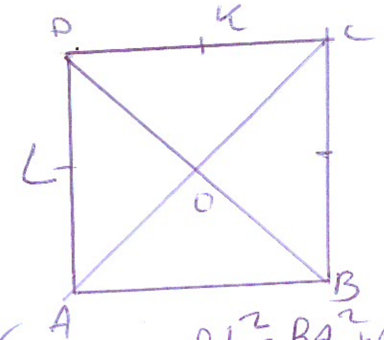
$(n+2)J_{n+1}=2\ln 2-\frac{1}{n+2}-(n+1)J_n$

$\therefore J_{n+1}=\frac{2\ln 2}{n+2}-\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{n+1}{n+2}J_n$

Exercice 4:

Partie A

1)



2) Comme $BL^2=BA^2+AC^2=a^2+(\frac{a}{2})^2 = a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}$ et $AK^2=AD^2+DK^2 = a^2+(\frac{a}{2})^2 = a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}$

Donc $BL=AK\neq 0$ D'autre part $(\vec{AK},\vec{BL})\neq 0\,[2\pi]$

Donc il existe une unique rotation r qui transforme A en B et K en L

Et comme méd$[AB]=(OK)$ et méd$[KL]$ (BD) et $(OK)\cap(BD)=\{O\}$ le centre de r est donc le pt O un angle de r est $(\vec{OA},\vec{OB}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

3/a) Comme $D\neq B$ et $L\neq O$ il existe donc une unique similitude directe S_1 qui transforme D en L et B en O le rapport de S_1 est $\frac{OL}{BD}=\frac{a/2}{a\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ et un angle de S_1 est:

$(\vec{BD},\vec{OL})=\pi/4\,[2\pi]$

b) Comme $S_1(P)=P$ et $S_1(B)=O$ on a donc $(\vec{PB},\vec{PO})=\frac{\pi}{4}[2\pi]$

or: $(\vec{AB},\vec{AO})=\frac{\pi}{4}[2\pi]$

D'où $(\vec{PB},\vec{PO})=(\vec{AB},\vec{AO})=\frac{\pi}{4}[\pi]$

Donc le point P appartient au cercle circonscrit au triangle OAB c'est à dire que P appartient au cercle de diamètre $[AB]$

De même: comme $S_1(P)=P$ et $S_1(D)=L$ on a: $(\vec{PD},\vec{PL})=\frac{\pi}{4}[2\pi]$

or: $(\vec{OD},\vec{OL})=\pi/4\,[2\pi]$

D'où $(\vec{PD},\vec{PL})=(\vec{OD},\vec{OL})=\frac{\pi}{4}\neq 0\,[\pi]$

Donc le point P appartient au cercle circonscrit au triangle ODL c'est à dire que P appartient au cercle de diamètre $[OD]$ on constate que le point O est commun aux cercles de diamètres $[AB]$ et $[OD]$ mais qu'il n'est pas le centre de S_1 car $S_1(O)$ $B\neq O$

le point L est donc le second point commun à ces deux cercle (autre que O)

3) b) : Montrons que P est le point d'intersection de (BL) et (AK), $(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{BL}) = (\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PO}) + (\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PL})$
$= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{BL}) + [\pi] =$
$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0 \; [\pi]$

Donc $B \in (BL)$

De même :

$(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{BK}) = (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PO}) + (\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{DK}) =$
$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DK}) \; [\pi] =$
$-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0 \; [\pi]$

Donc $P \in (AK)$

P est donc le point d'intersection de (BL) et (AK)

4) Comme $f_2(B) = D$ et $f_2(O) = L$
un angle de f_2 est $(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{DL}) =$
$(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{PB}) + (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DL}) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \; [2\pi]$
et le rapport de f_2 est :

$\frac{DL}{BO} = \frac{a/2}{a\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $f_2 \circ f_1$ et $f_1 \circ f_2$ sont deux similitudes directes de même rapport et de même angle et transforment le pt B en même pt L (car $f_2 \circ f_1(B)$
$= f_2(f_1(B)) = f_2(O) = L$ et $f_1 \circ f_2(B) =$
$f_1(f_2(B)) = f_1(D) = L$) Donc
$f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ Le centre de f_2 est donc celui de f_1 c'est-à-dire le point P.

5) a) $h = f_2 \circ f_1$ est la composée de deux similitudes directes dont le produit des rapports est $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\neq 1)$ et dont la somme des angle est $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi \; [2\pi]$
et ayant même centre P d'où h est une homothétie de centre P de rapport $-\frac{1}{4}$
or $h(P) = f_1 \circ f_2(B) = f_1(f_2(B)) = f_1(D) = L$

D'où : $\overrightarrow{BL} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{CB}$:

Donc : $4\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$

D'où : $P = \text{bar} \begin{array}{c|c} B & L \\ 1 & 4 \end{array}$

b) $P = \text{bar} \begin{array}{c|c} B & L \\ 1 & 4 \end{array} \Rightarrow P = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} B & D & A \\ 1 & 2 & 2 \end{array}$

or : $B = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & C & D \\ 1 & 1 & -1 \end{array}$

D'où : $P = \text{bar} \begin{array}{c|c|c|c|c} A & C & D & D & A \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}$

$\Rightarrow P = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & C & D \\ 3 & 1 & 1 \end{array}$

$\Rightarrow P = \text{bar} \begin{array}{c|c} A & K \\ 3 & 2 \end{array}$

Partie B

1)

1) $r = S_1 \circ S_2$ est composée de deux reflexions de plan perpendiculaires dont la droite l'intersection est (AD)

D'où : r est le demi-tour d'axe (AD)

2) $t = S_3 \circ S_4$ est composée de deux reflexions de plans parallèles D'où t est une translation le vecteur de t est : $2\vec{DA}$

) $f = r \circ t$ est composée d'une translation et d'une rotation telle que le vecteur de la translation est un vecteur directeur de l'axe de la rotation

D'où : f est le vissage d'axe (DA), d'angle π et de vecteur $2\vec{DA}$