Aceres

Bac 2014 SN Tales Outhman Ibrahi

Exercice 1

1) $P(2i) = (2i)^3 + (1-2i)(2i)^2 + (1-2i)(2i) - 2i$

$= -8i - 4(1-2i) + 2i(1-2i) - 2i$

$= -8i - 4 + 8i + 2i + 4 - 2i = 0$

$\boxed{P(2i) = 0}$

	1	$1-2i$	$1-2i$	$-2i$
$2i$	↓	$2i$	$2i$	$2i$
	1	1	1	0

$P(z) = (z-2i)(z^2+z+1)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2i)(z^2+z+1) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{z = 2i}$ ou $z^2+z+1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$

$z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$z'' = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$S = \left\{2i, -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$

$Im(2i) \geq Im\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \geq Im\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_0 = 2i$, $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

2) a) on a $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Soit $M(x,y)$ $M \in (BC) \Leftrightarrow \det(\vec{BM}, \vec{BC})$ ...

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+\frac{1}{2} & 0 \\ y-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow 2x + 1 = 0$

b) $M \in (BC) \setminus \{B, C\}$

$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + iy$ $(y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\})$ or $z' = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$ donc

$z' = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+iy+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{(iy)^2 + \frac{3}{4}}$

$= \frac{1}{-y^2 + \frac{3}{4}} \in \mathbb{R}$

Donc M' est sur l'axe des abscisses

3) a)

$f(z) = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z^2 + z\bar{z} + \bar{z}}$

$= \frac{\bar{z}}{(\bar{z}z)z + z\bar{z} + \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2 \times z + |z|^2 + \bar{z}}$

or $|z| = 1$ alors $|z|^2 = 1$

d'où

$f(z) = \frac{\bar{z}}{1 + z + \bar{z}}$

D) Si $z = e^{i\theta}$ alors

$\bar{z} = e^{-i\theta}$ et $|z| = 1$

$f(z) = \dfrac{e^{-i\theta}}{1+e^{i\theta}+e^{-i\theta}} = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

4) a) $M \in \mathscr{C}(0,1)\setminus\{B,E\}$

$\Rightarrow z = e^{i\theta}$ et $\cos\theta \neq -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow z' = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ y' = \dfrac{-\sin\theta}{1+2\cos\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'^2+y'^2 = \dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{|1+2\cos\theta|^2} = \dfrac{1}{|1+2\cos\theta|^2} \\ \text{et} \\ (2x'-1)^2 = \left(\dfrac{2\cos\theta}{1+2\cos\theta}-1\right)^2 = \dfrac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \end{cases}$$

Donc $x'^2+y'^2 = (2x'-1)^2$

b) $\Gamma : x^2+y^2 = (2x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 4x^2-4x+1$

$\Leftrightarrow 3x^2-4x-y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3(x^2-\frac{4}{3}x)-y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left[(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9})-\frac{4}{9}\right]-y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3(x-\frac{2}{3})^2-y^2 = \frac{1}{3}$

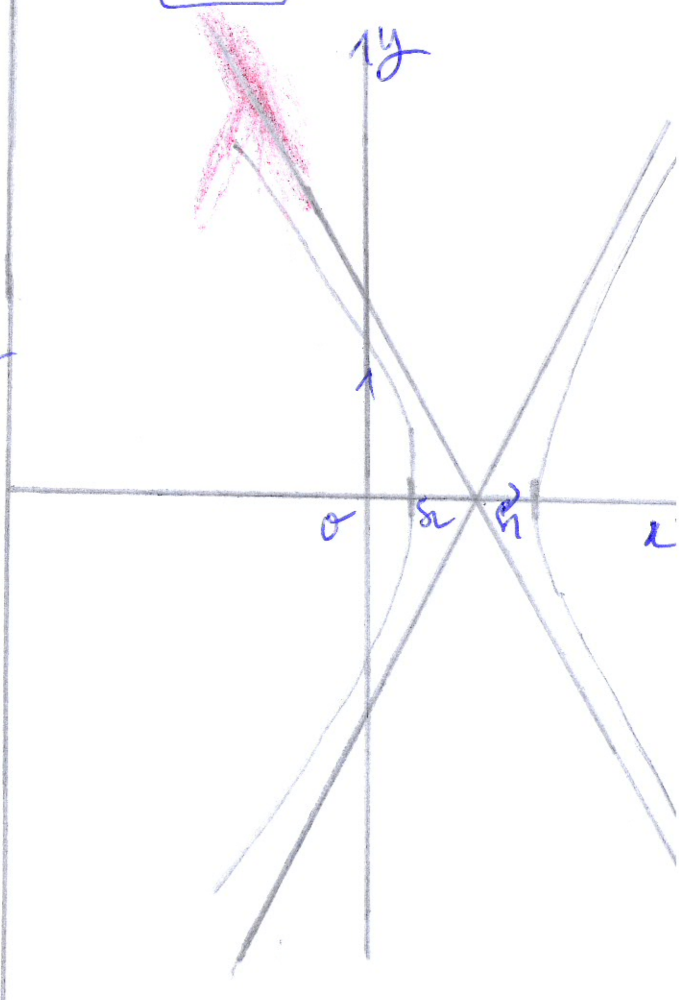
$\Leftrightarrow \dfrac{(x-\frac{2}{3})^2}{1/9} - \dfrac{y^2}{1/3} = 1$

4) b)

$\Gamma : \dfrac{(x-\frac{2}{3})^2}{(\frac{1}{3})^2} - \dfrac{y^2}{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = 1$

$\Gamma : \dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$

Donc Γ est une hyperbole de centre $\Omega(\frac{2}{3}, 0)$ et de sommets $S_1(1,0)$ et $S_2(\frac{2}{3}, 0)$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et d'excentricité $\boxed{e=2}$



Exercice 2

Exercice 23

1) a) $f(x) = xe^x$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

f est continue dérivable sur $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} xe^x = +\infty$

$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

le signe de $f'(x)$ est celui de $x+1$, $f'(x) = 0 \iff x = -1$

$f(-1) = -\frac{1}{e}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	$+\infty$

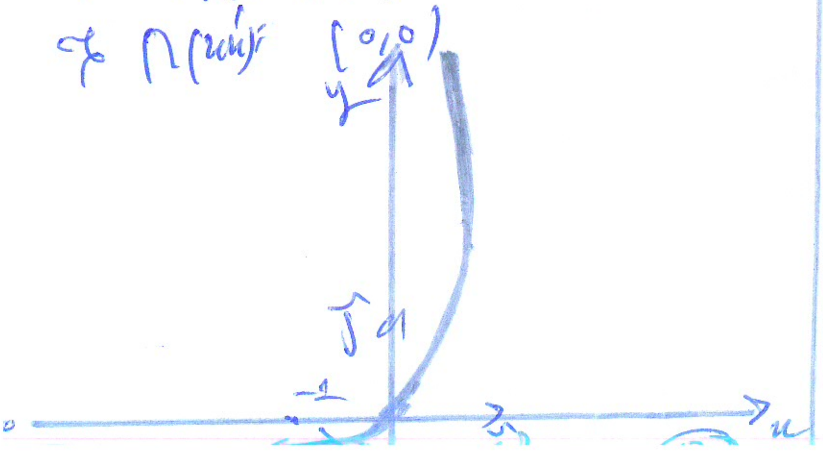
b) * $y = 0$ AH à (C) au voisinage de $-\infty$

* $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{xe^x}{x} = +\infty$

(C) admet une BP // (yy') au voisinage de $+\infty$

* $f \cap (yy')$: $(0,0)$

$f \cap (xx')$: $(0,0)$



c) $f(x) = xe^x$

$f'(x) = (x+1)e^x$

$f''(x) = (x+2)e^x$

$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = (x+2)e^x - 2(x+1)e^x + xe^x = 0$

Donc f est une solution de l'équation différentielle

$\boxed{y'' - 2y' + y = 0}$

d)

$A = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ $\quad f(x) \geq 0$

on pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = \\ v(x) = e \end{cases}$

$A = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$

$\boxed{A = 1\ ua}$

2) a) $I_1 = (-1)^1 \int_0^1 xe^x\,dx$

$\boxed{I_1 = -1}$ car $\boxed{\int_0^1 xe^x\,dx = 1}$

b) $I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x\,dx$

$|I_n| = |(-1)^n| \left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right|$

$= 1 \times \left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right|$

avec $\forall x \in [0,1]$

$x^n e^x \geq 0$ alors $\int_0^1 x^n e^x\,dx \geq 0$

Donc $\left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right| = \int_0^1 x^n e^x\,dx$

$|I_n| = \int_0^1 x^n e^x \, dx$

$0 \le x \le 1$

$1 \le e^x \le e$

$x^n \le e^x x^n \le e x^n$

$\int_0^1 x^n \, dx \le \int_0^1 e^x x^n \, dx \le e \int_0^1 x^n \, dx$

donc $\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \le |I_n| \le e \cdot \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1}}$$

comme $\lim_{+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{+\infty} I_n = 0$

c) $I_{n+1} = (-1)^{n+1} \int_0^1 x^{n+1} e^x \, dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$I_{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\left[x^{n+1} e^x\right]_0^1 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x \, dx \right)$

$= (-1)^{n+1} \left(e - 0 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x \, dx \right)$

$= (-1)^{n+1} e (-1)^{n+1} (n+1) \int_0^1 x^n e^x \, dx$

$$\boxed{I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1) I_n}$$

3

d) $J = \int_0^1 \frac{(x^3 + 4x^2 - 3x - 6) e^x}{x+2} \, dx$

	1	4	-3	-6
-2	$\downarrow$	-2	-3	6
	$\cancel{4}$ 1	3	-6	0

$J = \int_0^1 \frac{(x^2 + 3x - 6)\cancel{(x+1)} e^x}{\cancel{(x+1)}} \, dx$

$= \int_0^1 (x^2 + 3x - 6) e^x \, dx$

$= I_2 - 3I_1 - 6(e-1)$

or $I_1 = -1$ et

$I_2 = e - 2$

$$\boxed{J = 7 - 5e}$$

EX 3

1 a) on a $f(0)=0$

et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$= 0 - 0$

donc f est continue en 0^+

b) $\lim\limits_{0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{0^+} \frac{x\ln(1+1/x)}{x-0}$

$= +\infty$

f n'est pas (~~continue~~) dérivable à 0^+ et la $\mathcal{C}_f$ de f admet une demi tangente verticale.

c) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} x\ln(1+1/x)$ F.I

on pose $t = \frac{1}{x}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} t = 0^+$ et

$x = \frac{1}{t}$

$\lim\limits_{0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ $\quad \boxed{\lim\limits_{+\infty} f(x) = 1}$

Donc $y=1$ AH à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

2) a) $f(x) = x\ln(1+1/x)$

$f'(x) = \ln(1+1/x) + x\left(\frac{-1/x^2}{1+1/x}\right)$

$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$= \ln(1+1/x) - \frac{1}{x+1}$

$f''(x) = \frac{-1/x^2}{1+1/x} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$\boxed{f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}}$

$f''(x) \leq 0 \ \forall x > 0$

donc $f' \searrow$ sur $]0,+\infty$

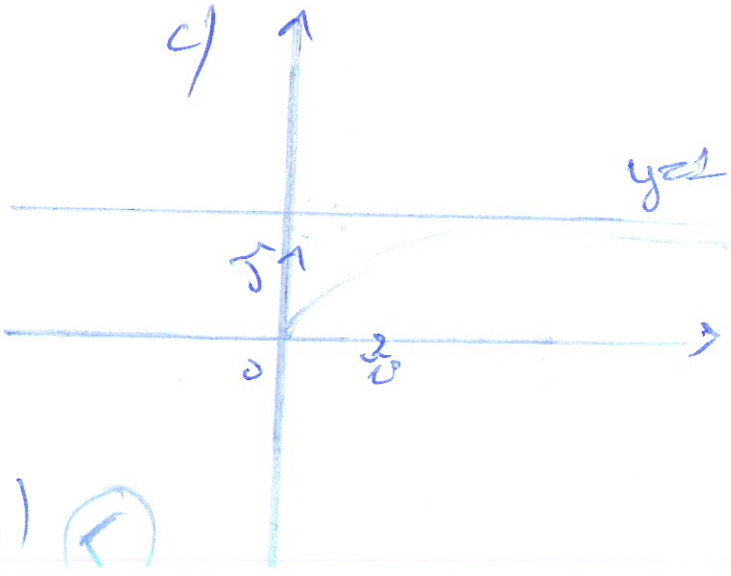
or $\lim\limits_{+\infty} f'(x) = 0$

d'où $f'(x) > 0$

b)

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

c)



3) a)

Pour que A_n existe il suffit que f_n soit continue sur $[0,1]$

sur $[0,1]$ $f_n(x) = x^n \ln(1+\frac{1}{x})$ est le produit de 2 fonctions continue

et f_n est continue sur $[0,1]$

$\lim_{0^+} f_n(x) = \lim x^n \ln(1+\frac{1}{x})$
$= 0 = f(0)$

d'ou f_n est continue en 0^+

donc A_n definit bien une suite numerique

b) d'apres la T.V.

$0 \leq f(x) \leq 1$

$0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$

c) $A_n = \int_0^1 f_n(x)$

$0 \leq f_n(x) \leq x^{n-1}$

$0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 x^{n-1}\,dx$

$0 \leq A_n \leq \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1$

$\boxed{0 \leq A_n \leq 1/n}$

$\lim_{+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} A_n = 0$

4) a) $I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 x^n \ln x\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^n \end{cases}$

$\begin{cases} u'(x) = 1/x \\ v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$

$I_n(\alpha) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1}\int_\alpha^1 x^n$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right.$

$= \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha - \frac{1}{(n+1)^2}$

b) $\lim_{0^+} I_n(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0^+}\left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{-1}{(n+1)^2}$

$\lim_{0^+} I_n(\alpha) = \frac{-1}{(n+1)^2}$

c) $J_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1)$

on pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \ln(x+1) \end{cases}$

$\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \end{cases}$

$J_{n+1} = [x^{n+1}((x+1)\ln(x+1)$
$- x)]_0^1 - \int_0^1 (n+1)(x^n \ldots$

Suite du Exo (3)

$\ln(u+1) - u^{n+1})\,du$

$$J_{n+1} = 2\ln 2 - 1 - (n+1)\left[\int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)\,dx - \int_0^1 u^n \ln(u+1)\,du\right] + \left[\frac{n+1}{n+2}u^{n+2}\right]_0^1$$

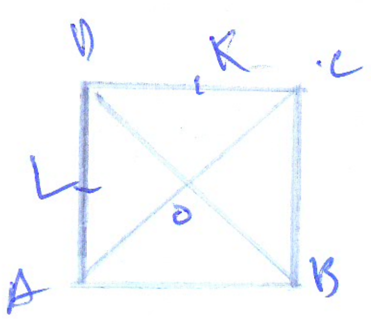
$$J_{n+1} = 2\ln 2 - 2 - (n+1)I_{n+1} + (n+1)I_n + \frac{n+1}{n+2}$$

$$(n+2)I_{n+1} = 2\ln 2 - 2 + (n+1)I_n + \frac{n+1}{n+2}$$

$$J_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} + \frac{n+1}{(n+2)^2} - \frac{n+2}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2}I_n$$

Exo 4

1)



2) comme $AK = BL \neq 0$ et $\vec{AB} \neq \vec{KC}$ donc il existe une r | $A \to B$

Δ_2 méd $[AB] \cap$ méd $[KL] = O$

le centre de r est le point O un angle de r est $(\vec{OA},\vec{OB}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

3-a)

comme $DB \neq 0$, $LO \neq 0$ donc il $\exists$ une unique similitude qui transforme $\begin{cases} D \to L \\ B \to O \end{cases}$

le rapport $\frac{OL}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

l'angle $(\vec{BD},\vec{OL}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

(b) comme $f_1(P) = B$, $f_1(B) = O$ on a donc $(\vec{PB},\vec{AO}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

alors $(\vec{PB},\vec{PO}) = (\vec{AB},\vec{AO}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc $P \in \mathcal{C}$ circonscrit au triangle $OAB \Leftrightarrow P \in \mathcal{C}[AB]$

De même f_1 $\begin{cases} P \to P \\ D \to O \end{cases}$

$(\vec{PD},\vec{PL}) = (\vec{OD},\vec{OL}) = \pi/4\ \cancel{[2\pi]}\ [2\pi]$

Donc le pt $P \in \mathscr{C}$ circonscrit
au triangle ODL
$\Leftrightarrow P \in \mathscr{C}[OD]$

on constate que le pt O
est commun au $\mathscr{C}[AB]$ et $\mathscr{C}$
[OD] mais qu'il n'est pas
le centre de f_1 car $f_1^{-1}(O) = B \neq O$
le pt P est le second pt
commun a ces deux cercles (autre
que O)

3) b)

on a $(\widehat{\vec{PB}, \vec{PL}}) = (\widehat{\vec{PB}, \vec{PO}}) + (\widehat{\vec{PO}, \vec{PL}})$

$= (\widehat{\vec{AB}, \vec{AO}}) + (\widehat{\vec{DO}, \vec{DL}})\ [\pi]$

$= 0 \qquad P \in (BL)$

De m̂

$(\widehat{\vec{PA}, \vec{PK}}) = (\widehat{\vec{PA}, \vec{PO}}) + (\widehat{\vec{PO}, \vec{PK}})$

$= (\widehat{\vec{BA}, \vec{BO}}) + (\widehat{\vec{DO}, \vec{DK}})\ [\pi]$

$= 0$

Don $P \in (AK)$

P donc $= (BL) \cap (AK)$

4) Comme $f_2(B) = D$ et $f_2(O) = L$

Un angle de f est

$(\widehat{\vec{BO}, \vec{DL}}) = (\widehat{\vec{BD}, \vec{DB}}) + (\widehat{\vec{DB}, \vec{DL}})$

$= \pi - \pi/4 = 3\pi/4\ [2\pi]$

le rapport $\frac{DL}{BO} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $f_2 \circ f_1$ et $f_1 \circ f_2$ est la
composé de 2 similitude
de m̂ angle qui transforme
$B \to L$ car $f_2 \circ f_1(B) = f_2(f_1(B))$
$= f_2(O) = L$
$f_1 \circ f_2(B) = f_1(f_2(B)) = f_1(D) = L$
$\Leftrightarrow f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$
le centre est le pt P

5) a) $h = f_1 \circ f_2$ est la
composé de 2 similitude
directes dont le produit
des rapports est $\frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$
et donc la somme des
angle $= \pi/4 + \frac{3\pi}{4} = \pi\ [2\pi]$
et ayant m̂ centre de
P d'où h est une
homothetie de centre
et de rapport $-\frac{1}{4}$
or $h(B) = f_1 \circ f_2(B) = f_1(f_2(B))$
$= f_1(D)$ D'où
$\vec{PL} = -\frac{1}{4}\vec{PB}$
$4\vec{PL} + \vec{PB} = 0$

Donc $P = \text{bar} \begin{array}{c|c} B & L \\ 1 & 4 \end{array}$

b) $P = \text{bar} \begin{array}{c|c} B & L \\ 1 & 4 \end{array} = \text{bar}$

suite de Exo 4

b)

$P = bar$

B	L
1	4

$P = bar$

B	D	A
1	2	2

or $B = bar$

A	C	D
1	1	1

$P = bar$

A	C	D
3	1	2

$= bar$

A	K
3	2

Partie B

1) $r = S_1 \circ S_2$ est la composé de 2 réflexions des plans perpendiculaire dont la droite d'intersection (AD)

2) r est le demi tour d'axe (AD)

2) $t = S_3 \circ S_4$ est la composé de 2 réflexions de plans parallèles Donc t est une translation de vecteur de t $2\vec{DA}$

3) $f = r \circ t$ est la composé d'une translation et d'une rotation telleque le vecteur directeur de l'axe de rotation

Donc f, est le vissage d'axe (DA) d'angle π de vecteur $2\vec{DA}$.