SOLUTION BAC 2015

« SESSION NORMALE »

Mathematique | Bac 2015 SN

Exercice 1:

1) $P(z)=z^3-(11+6i)z^2+(28+38i)z-12-60i$

a) $P(3)=3^3-(11+6i)(3)^2+(28+38i)(3)-12-60i$

$\boxed{P(3)=0}$

Tableau d'Horner :

	1	$-11-6i$	$28+38i$	$-12-60i$
3		3	$-24-18i$	$12+60i$
	1	$-8-6i$	$4+20i$	0

d'où $\forall z \in \mathbb{C}$,

$P(z)=(z-3)(z^2+az+b)$

où $a=-8-6i$ et $b=4+20i$

Donc $\boxed{P(z)=(z-3)(z^2-(8+6i)z+4+20i)}$

b) $P(z)=0 \Leftrightarrow$

$(z-3)(z^2-(8+6i)z+4+20i)=0$

$\begin{cases} z=3 \\ (z^2+(-8-6i)z+4+20i)=0 \end{cases}$

$\Delta=(-8-6i)^2-4(4+20i)$

$\Delta=12+16i=(4+2i)^2$

$\delta=4+2i$

$z_1=\dfrac{8+6i-4-2i}{2}=2+2i$

$z_2=\dfrac{8+6i+4+2i}{2}=6+4i$

D'où l'ensemble de solutions de l'equation $P(z)=0$

$\boxed{S\{(3;6+4i;2+2i)\}}$

c) On a : $z_A=3$; $z_B=2+2i$ et $z_C=6+4i$.

et comme $G=bar\{(A;2)(B;-2)(C;2)\}$

$z_G=\dfrac{2z_A-2z_B+2z_C}{2-2+2}$

$z_G=\dfrac{2\times3-2(2+2i)+2(6+4i)}{2}=7+2i$

$\boxed{z_G=7+2i}$

2) $\vec{MM'}=2\vec{MA}-2\vec{MB}+(3-K)\vec{MC}$.

a) On a : M ~~ap~~ a pour affixe z et M' a pour affixe M'

$\vec{MM'}=2\vec{MA}-2\vec{MB}+(3-K)\vec{MC}$

$z'-z=2(3-z)-2(2+2i-z)+(3-K)\times(6+4i-z)$

$z'=(K-2)z+20-6K+(8-4K)i$

$\Leftrightarrow z'=az+b$ pour que a soit =1 il faut que $K-2=1 \Rightarrow K=3$.

d'où $z'=z+2-4i$ donc f_3 est une translation dont le vecteur a pour affixe $2-4i$

$\Leftrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

b) Si $K\in\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$

Les points invarients sont d'affixes $z'=z$

$\Leftrightarrow z=(K-2)z+20-6K+(8-4K)i$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{20-6K+(8-4K)i}{3-K}$

D'où f_K admet un unique pt invariant Ω_K d'affixe ?

$z_K = \frac{20-6K}{3-K} + \frac{(8-4K)}{3-K}i$

comme $z' = (K-2)z + 20-6K + (8-4K)i$; f_K est l'homotethie de centre Ω_K et de rapport $K-2$.

c) comme l'affixe de Ω_K est $z_K = \frac{20-6K}{3-K} + \frac{(8-4K)i}{3-K}$

d'où $\begin{cases} x_K = \frac{20-6K}{3-K} = \frac{6K-20}{K-3} \\ y_K = \frac{8-4K}{3-K} = \frac{4K-8}{K-3} \end{cases}$

$\begin{cases} x_K = 6 - \frac{2}{K-3} \\ y_K = 4 + \frac{4}{K-3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{2x+y-16=0}$

est l'equation d'une droite Δ

comme $(x_K ; y_K) = \left(6 - \frac{2}{K-3} ; 4 + \frac{4}{K-3}\right)$

avec $\frac{2}{K-3} \neq 0$ et $\frac{4}{K-3} \neq 0$

On a alors $(x_K ; y_K) \neq (6 ; 4)$

d'où $\Omega_K \neq C(6;4)$.

comme $K \neq 2 \Rightarrow x_K \neq x_2$ et $y_K \neq y_2 \Rightarrow (x_K ; y_K) \neq (x_2 ; y_2)$

$(x_K ; y_K) \neq (8;0)$ donc $\Omega_K \neq N(8;0)$.

d'où le lieu geometrique des pts Ω_K lorsque K decrit $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$ est la droite $\Delta : 2x+y-16=0$ privé de $C(6;4)$ et $N(8;0)$

si $K=1$; $\Omega_1 = G$ c'est le quatrieme sommet du $ABCG$

avec $\begin{cases} x_1 = \frac{14}{2} = 7 \\ y_1 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$ d'où $\Omega_1(7;2)$

d) On a : $z' = (K-2)z + 20 - 6K + (8-4K)i$

Pour $K=1$, On a $z' = -z + 14 + 4i$

Alors l'affixe du point R centre de gravité du triangle AMM' est $z_R = \frac{z_A + z + z'}{3}$

$z_R = \frac{z + -z + 14 + 4i + 3}{3} = \frac{17}{3} + \frac{4}{3}i$

Alors lorsque M décrit le cercle Γ de centre G passant par C, le pt R reste fixe.

3) Pour tout point M on a : $\varphi(M) = 2MA^2 - 2MB^2 + 2MC^2$

$\varphi(M) = m$.

La somme des coefficients est egale à 2, le barycentre G du systeme est le $\Omega_1(7;2)$

Donc $\varphi(M) = MG^2 + \varphi(G)$

$MG^2 = \frac{m - \varphi(G)}{2}$

Or $\varphi(G) = 2GA^2 - 2GB^2 + 2GC^2$.

$GA^2 = |z_A - z_G|^2 = |3 - 7 - 2i|^2 = 20$

$GB^2 = |z_B - z_G|^2 = |2 + 2i - 7 - 2i|^2 = 25$

$GC^2 = |z_C - z_G|^2 = |6 + 4i - 7 - 2i|^2 = 5$

alors : $\varphi(G) = 2\times 20 - 2\times 25 + 2\times 5 = 0$

d'où $MG^2 = \frac{m}{2}$.

si $m<0$: Γ_m est l'ensemble vide

si $m=0$: Γ_m est le pt G.

si $m>0$: Γ_m est $\mathcal{C}(G ; \sqrt{\frac{m}{2}})$

b) D'aprés les resultats precedents; pour $m=10$.
L'ensemble est un cercle de centre G et de rayon $r=\sqrt{\frac{m}{2}}=\sqrt{\frac{10}{2}}=\sqrt{5}$. Comme $GC^2=5$; ce cercle passe par C. Donc Γ_{10} est le cercle de centre G passant par C.

Mathematique	BAC 2015 SN

Exercice 3 :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

1.a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1$

On a: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow (C)$ admet une asymptote horizontale d'equation $y = 1$ au voisinage de $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow (C)$ admet une asymptote horizontale d'equation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

b) $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

T.V de f

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$-$	
f	1	$\searrow$	0

Comme f est continue et strictement decroissante sur $\mathbb{R}$ donc f realise une bijection de $]-\infty ; +\infty[$ sur $J = f(\mathbb{R}) =]1; 0[$ →

Pour exprimer $f^{-1}(x)$ on pose $y = f(x) \Rightarrow \frac{1}{1+e^x} = y$

$\Rightarrow y(1+e^x) = 1$

$e^x = \frac{1-y}{y} \Rightarrow x = \ln\frac{1-y}{y}$

D'où $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right); \; x \in]0;1[$

2.a) $f(2 \times 0 - x) + f(x) = f(-x) + f(x)$

$= \frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x+1}{1+e^x} = 1 = 2 \times \frac{1}{2}$

D'où $\Omega(0; \frac{1}{2})$ est un centre de symetrie de la courbe (C)

b) Les courbes (C) et (C') sont symetriques par rapport à la droite d'equation $y = x$.

S'il se coupent en un pt d'abscisse x alors x verifie $f(x) = x$. On pose $V(x) = f(x) - x$

V est derivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, avec $V'(x) = f'(x) - 1$

$V'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} - 1 = -\left(1 + \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)$

Il est clair que $V'(x) < 0$

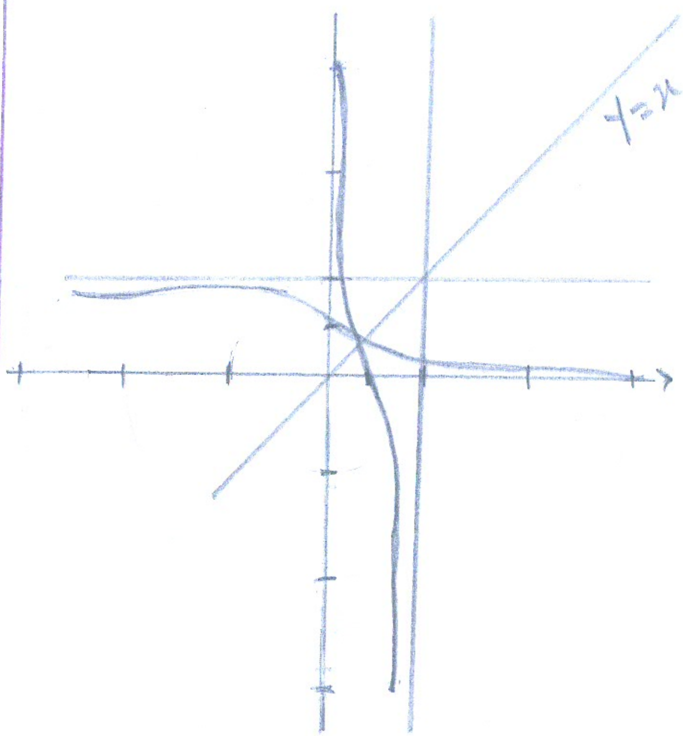
On a : $\begin{cases} V(0,4) = 1,3 \times 10^{-3} > 0 \\ V(0,5) = -0,12 < 0. \end{cases}$

$V(0,4) \times V(0,5) < 0$ d'où

D'après T.V.I l'equation $V(x) = 0$ admet une solution α telle que $0,4 < \alpha < 0,5$.

et comme V est continue sur $[0,4; 0,5]$ et strictement decroissante et change de signe d'où d'après le theorme de la bijection reciproque la solution α est unique.

Mathematique BAC 2015 SN



d) $A = 2\int_0^\alpha (f(x) - x)\,dx.$

$A = 2\int_0^\alpha \frac{1}{e^x+1} - x\,dx.$

$A = 2\int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} - x\,dx.$

$A = -2\int_0^\alpha \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} + x\,dx$

$A = -2\left[-\ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{2}x^2\right]_0^\alpha$

$A = 2\left[\ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{2}x^2\right]_0^\alpha$

$A = 2\left(\ln(1+e^{-\alpha}) - \frac{1}{2}\alpha^2 - \ln 2\right)$

$A = 2\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{2}\right) - \alpha^2$

$\boxed{A = 2\ln\left(\frac{1+e^{\alpha}}{2e^{\alpha}}\right) - \alpha^2 \text{ u.a}}$

3) On a : $I_n = \int_0^\alpha f^n(t)\,dt$

a) $I_1 = \int_0^\alpha f(t)\,dt = \int_0^\alpha \frac{1}{e^t+1}\,dt$

$I_1 = -\int_0^\alpha \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt = \left[-\ln(1+e^{-t})\right]_0^\alpha$

$I_1 = -\ln(1+e^{-\alpha}) + \ln 2.$

$I_1 = -\ln\left(\frac{1+e^\alpha}{e^\alpha}\right) + \ln 2.$

$I_1 = \ln\left(\frac{1}{e^\alpha+1}e^\alpha\right) + \ln 2.$

$I_1 = \ln(\alpha e^\alpha) + \ln 2$

$I_1 = \ln(\alpha) + \ln(e^\alpha) + \ln 2$

$I_1 = \alpha + \ln 2\alpha.$

3.a) On a : $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$

$f^2(x) - f(x) = \frac{1}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{1+e^x}$

$= \frac{1-1-e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$

d'où $f'(x) = f^2(x) - f(x).$

c) $I_{n+1} - I_n = \int_0^\alpha f^{n+1}(t) - f^n(t)\,dt$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^\alpha f^{n-1}(t)\left(f^2(t) - f(t)\right)dt$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^\alpha f^{n-1}(t)\,f'(t)\,dt$

$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left[f^n(t)\right]_0^\alpha$

$= \frac{1}{n}\left(f^n(\alpha) - \frac{1}{(1+e^0)^n}\right)$

donc $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}(\alpha^n - \frac{1}{2^n})$.

d) On a $\alpha > 0$ et pour tout entier naturel non nul n ; f^n est continue et positive sur $[0;\alpha]$. Alors $\int_0^\alpha f(t)\,dt \geq 0$. D'où $I_n \geq 0$. Donc (I_n) est positive.

D'autre part, pour tout entier naturel non nul n On a :

$0 < \alpha < 0,5 \Rightarrow 0 < \alpha^n < (\frac{1}{2})^n$

$\Rightarrow \alpha^n - \frac{1}{2^n} < 0 \Rightarrow I_{n+1} - I_n < 0$.

D'où (I_n) est decroissante.

On deduit que la suite (I_n) est convergente, car decroissante et minorée par 0.

4.a) $0 \leq t \leq \alpha$

$f(\alpha) \leq f(t) \leq f(0)$

$\alpha \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$

$\alpha^n \leq f^n(t) \leq \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow \int_0^\alpha \alpha^n dt \leq \int_0^\alpha f^n(t)\,dt \leq \int_0^\alpha \frac{1}{2^n}\,dt$

$\alpha^n [t]_0^\alpha \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}[t]_0^\alpha$

$\alpha^n(\alpha - 0) \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}(\alpha - 0)$

$\alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$

Comme $0 < \alpha < 1$, On a :

$\lim_{x \to +\infty} \alpha^{n+1} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0$.

d'où d'après T.G.

$\lim_{x \to +\infty} I_n = 0$.

b) On a $\forall n > 0$ $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}(\alpha^n - \frac{1}{2^n})$

Donc :

Pour $n=1$; $I_2 - I_1 = (\alpha - \frac{1}{2})$

Pour $n=2$; $I_3 - I_2 = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \frac{1}{2^2})$

Pour $n=3$; $I_4 - I_3 = \frac{1}{3}(\alpha^3 - \frac{1}{2^3})$

$\vdots$

Pour $n = n-1$; $I_n - I_{n-1} = \frac{1}{n-1}(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}})$

En addition membre par membre On a :

$I_n - I_1 = (\alpha - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}) + \dots + \frac{1}{n-1}(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}})$

$I_n - I_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha^k - \frac{1}{2^k})$.

$I_n = I_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha^k - \frac{1}{2^k})$

$I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha^k - \frac{1}{2^k})$

$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha^k - \frac{1}{2^k})$

$= \lim_{n \to +\infty} I_n - \lim_{n \to +\infty}(\alpha + \ln 2\alpha)$

$\therefore \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha^k - \frac{1}{2^k}) = -(\alpha + \ln 2\alpha)$

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha^k - \frac{1}{2^k}) = -\alpha - \ln 2\alpha}$

Exercice 4:

1.a) D'après le tableau d'Horner :

	3	-12	19	-10
1		3	-9	10
	3	-9	10	0

Alors : $3x^3 - 12x^2 + 19x - 10$

$= (x-1)(3x^2 - 9x + 10)$

$\therefore \forall x \in \mathbb{R}$; $g(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2-9x+10)}{x(x^2-4x+5)}$

Alors : $a = 3$; $b = -9$ et $c = 10$.

b) On a : $3x^2 - 9x + 10$ et $x^2 - 4x + 5$ sont negatives car : $\Delta_1 = -39$ et $\Delta_2 = -4$. les coefficient de $x^2 > 0$

D'où le signe de $g(x)$ est celui de $\dfrac{x-1}{x}$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x-1}{x}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	‖	$+$		$+$	

2.a) $\lim\limits_{x\to 0} (3x-3) = -3$ et

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-4x+5}{x^2} = +\infty \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right) = +\infty$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

La courbe (C) admet une asymptote verticale d'equation $x = 0$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-4x+5}{x^2} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right) = 0$.

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - 3x - 3) = 0$,

donc la courbe (C) admet une asymptote oblique D. d'equation $y = 3x - 3$.

P.R : $f(x) - y = \ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right)$

On rappelle que le signe de $\ln t$ est celui de $t-1$

d'où le signe de $\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}$ est celui de $\dfrac{x^2-4x+5}{x^2} - 1$.

$\dfrac{x^2-4x+5-x^2}{x^2} = \dfrac{-4x+5}{x^2}$

donc le signe de $f(x) - y$ est celui de $-4x+5$

x	$-\infty$		0		5/4		$+\infty$
$-4x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-y$		$+$	‖	$+$		$-$	
PR		C/D	‖	C/D		D/C.	

Pour $x = \frac{5}{4}$ On a $y = 3\times\frac{5}{4} - 3 = \frac{3}{4}$.

Alors D coupe la courbe (C) au pt $\left(\frac{5}{4} ; \frac{3}{4}\right)$

Mathematique BAC 2015 SN

3.a) $f(x)=3x-3+\ln(x^2-4x+5)-\ln x^2$

$f(x)=3x-3+\ln(x^2-4x+5)-2\ln x$

$\Rightarrow f'(x)=3+\frac{2x-4}{(x^2-4x+5)^8}-\frac{2}{x}$

$f'(x)=3+\frac{(2x-4)x-2(x^2-4x+5)^8}{x(x^2-4x+5)^8}$

$f'(x)=\frac{3x^3-12x^2+15x+4x-10}{x^3-4x^2+5x}$

$f'(x)=\frac{3x^3-12x^2+19x-10}{x^3-4x^2+5x}$

$f'(x)=g(x)$.

d'où le signe de $f'(x)$ st celui de $g(x)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|\|$	$-$ 0 $+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$\|\|$	$+\infty \searrow \ln 2 \nearrow +\infty$	

b) Sur l'intervalle $]0;+\infty[$; On a $f(x)\geq \ln 2>0$. Donc l'equation $f(x)=0$ n'admet pas de solution dans cet intervalle.

Sur l'intervalle $]-\infty;0[$, f est continue, strictement monotone et change le signe car $0\in f(]-\infty;0[)=]-\infty;+\infty[$. Donc l'equation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans cet intervalle.

Alors $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}^*$

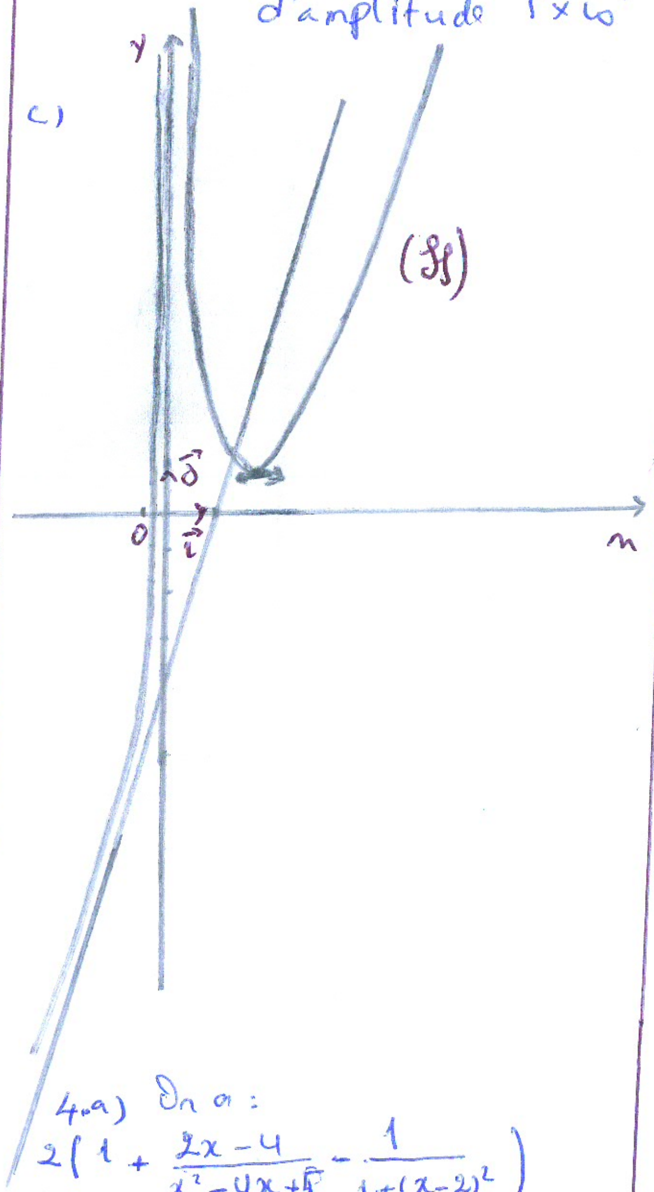
c) $f(-1)=-6+\ln 10<0$

$f(-0,5)=-0,5$.

$-0,5<\alpha<0$.

C'est un encadrement de α d'amplitude 5×10^{-1}

c)



4.a) On a :

$2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+(x-2)^2}\right)$

$=2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+x^2-4x+4}\right)$

$=\frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}$

$\therefore \frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}=2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+(x-2)^2}\right)$

Mathematique | Bac 2015 SN

b) $A = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx$

$A = \left[\ln|x^2-4x+5|\right]_3^{2+\sqrt{3}}$

$A = \ln|(2+\sqrt{3})^2 - 4(2+\sqrt{3}) + 5|$
$- \ln|(3)^2 - 4(3) + 5|$

$A = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2.$

$\boxed{A = \ln 2}$

c) En posant $x = 2 + \tan t$
$\forall\, t \in [0; \frac{\pi}{2}[$

$\begin{cases} x = 3 \iff \tan t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x = 2+\sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

$x = 2 + \tan t \Rightarrow dx = (1+\tan^2 t)\,dt$

Pour calculer $B = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)}$

$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt.$

$B = [t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

$\boxed{B = \frac{\pi}{12}}$

d) $J = \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2-4x+5)\,dx.$

On pose $\begin{cases} U(x) = \ln(x^2-4x+5) \\ V'(x) = 1 \end{cases}$

Alors $\begin{cases} U'(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+5} \\ V(x) = x \end{cases}$

$J = \left[x\ln(x^2-4x+5)\right]_3^{2+\sqrt{2}} - \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x^2-4x\,dx}{x^2-4x+5}$

$J = (2+\sqrt{3})\ln 4 - 3\ln 2 -$
$\int_3^{2+\sqrt{3}} 2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2}\right)dx$

$J = (2+\sqrt{3})\ln(2)^2 - 3\ln 2 - 2\left([x]_3^{2+\sqrt{3}} + A - B\right)$

$\boxed{J = (-1+2\sqrt{3})\ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}}$

$K = 2\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln x\,dx$

On pose $\begin{cases} U(x) = \ln x \\ V'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = \frac{1}{x} \\ V(x) = x. \end{cases}$

$K = 2\left([x\ln x]_3^{2+\sqrt{3}} - \int_3^{2+\sqrt{3}} dx\right)$

$K = 2\left([x\ln x - x]_3^{2+\sqrt{3}}\right).$

$K = (4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 2 - 2\sqrt{3}$
$- 6\ln 3.$

$S = \int_3^{2+\sqrt{3}} (y - f(x))\,dx.$

$= -\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)dx.$

$= -\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2-4x+5) + \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln x^2\,dx.$

$S = -J + K.$

$S = (1-2\sqrt{3})\ln 2 - 2 + 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$
$+ (4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 2 - 2\sqrt{3}$
$- 6\ln 3.$

$S = (1-2\sqrt{3})\ln 2 + (4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})$
$+ 2 - 2\sqrt{3} - 6\ln 3$

$\boxed{S \simeq 1{,}0066 \text{ u.a}}$

Fin Bac 2015 « SN »