Zeinebou m/ Mohamed Abderahman

Bac 2012 SN

Exercice 1 :

$f(x) = e^x \ln(e^x+1)$

1°) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^x \ln(e^x+1)\right)$

$= 0 \times 0 = 0$

$\therefore \boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$

D : $y = 0$ A.H au voisinage de $-\infty$

$- \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x \ln(e^x+1)\right)$

$= +\infty \times +\infty = +\infty$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x \ln(e^x+1)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \ln(e^x+1)$

$= +\infty \times +\infty = +\infty$

$\therefore \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

C_f admet une B.P de direction (oy) au voisinage de $+\infty$

2.a°) comme $f(x)$ est continue et derivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x \ln(e^x+1) + e^x \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$

$\boxed{f'(x) = e^x \ln(e^x+1) + \frac{e^{2x}}{e^x+1}}$

or $\forall x \in \mathbb{R}$; on a :

$e^x > 0 \Leftrightarrow e^x+1 > 0$ avec $\ln(e^x+1) > 0$

d'où : $f'(x) > 0$

T.V de $f(x)$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

b°) comme $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (strictement croissante) alors $f(x)$ réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$

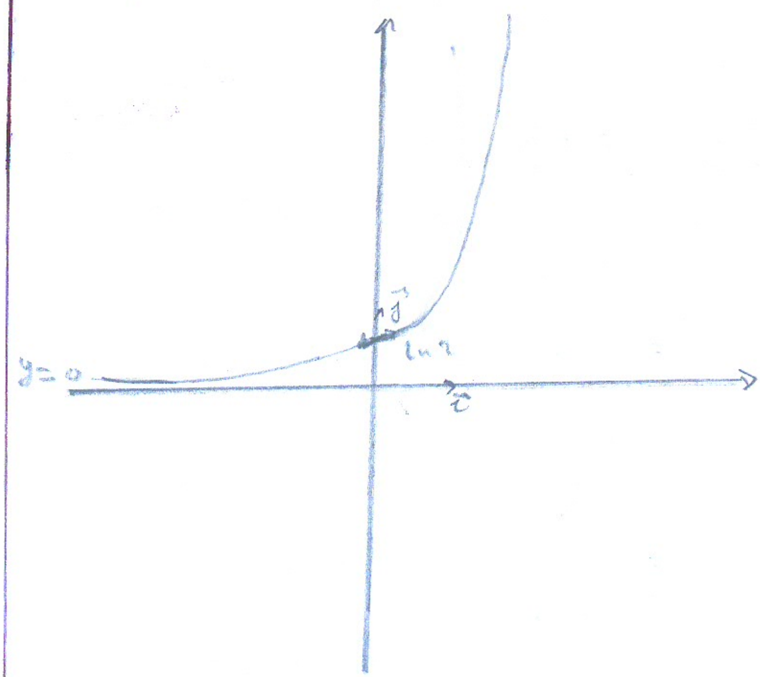
$J =]0 ; +\infty[$.

c°) La courbe (C_f) :

$C_f \cap (oy) \Leftrightarrow f(x) = 0$

$\Leftrightarrow x = \ln 2$

$C_f \not\cap (ox)$ car $f(x) > 0$



3°) $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

Methode a)

$f'(x)=f(x)+ae^x+b+\frac{ce^{-x}}{1+e^{-x}}$

$=f(x)+ae^x+b+\frac{\frac{c}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$

$=f(x)+ae^x+b+\frac{\frac{c}{\cancel{e^x}}}{\frac{e^x+1}{\cancel{e^x}}}$

$=f(x)\ ae^x+b+\frac{c}{e^x+1}$

$=f(x)+ae^x+\frac{b(e^x+1)+c}{e^x+1}$

$=f(x)+ae^x+\frac{be^x+b+c}{e^x+1}$

$=f(x)+\frac{ae^x(e^x+1)+be^x+b+c}{e^x+1}$

$=f(x)+\frac{ae^{2x}+ae^x+be^x+b+c}{e^x+1}$

$f'(x)=f(x)+\frac{ae^{2x}+(a+b)e^x+b+c}{e^x+1}$

or $f'(x)=e^x\ln(e^x+1)+\frac{e^{2x}}{e^x+1}$

$=f(x)+\frac{e^{2x}}{e^x+1}$

$\cancel{f(x)}+\frac{e^{2x}}{e^x+1}=f(x)+\frac{ae^{2x}+(a+b)e^x+b+c}{e^x+1}$

$\frac{e^{2x}}{e^x+1}=\frac{ae^{2x}+(a+b)e^x+b+c}{e^x+1}$

Par identification

$\begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$

D'où $\boxed{f'(x)=f(x)+e^x-1+\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}}$

$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)\,dx$

or $f(x)=f'(x)-e^x+1-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$I=\int_0^1\left(f'(x)-e^x+1-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx$

$I=\int_0^1 f'(x)dx-\int_0^1 e^x dx+\int_0^1 dx+\int_0^1\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$

$=[f(x)]_0^1-[e^x]_0^1+[x]_0^1+[\ln(1+e^{-x})$

or $f(1)=e\ln(e+1)$

$f(0)=\ln(2)$

$I=e\ln(e+1)-\ln 2-e+1+1-0+\ln(1+e^{-1})$
$-\ln(2)$

$=e\ln(e+1)-\ln 2-e+2+\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)-\ln(2)$

$=e\ln(e+1)-\ln(2)-e+2+\ln\left(\frac{e+1}{e}\right)-\ln(2)$

$=e\ln(e+1)-\ln 2-e+2+\ln(e+1)-\ln e-\ln 2$

$=(e+1)\ln(e+1)-e+2-2\ln 2-1$

$I=(e+1)\ln(e+1)-e+1-2\ln 2$

D'où $\boxed{I=(e+1)\ln(e+1)-e+1-2\ln 2}$

Methode b) on pose $t=e^x+1$

$x=0 \Leftrightarrow t=2$

$x=1 \Leftrightarrow t=e+1$

$dt=e^x dx$ or $e^x=t-1$

$\Leftrightarrow dt=(t-1)dx \Leftrightarrow dx=\frac{dt}{t-1}$

Zeinebou m Mohamed Abderahman

Bac 2012 SN

suite exo1 3°) Methode b)

$$I = \int_2^{e+1} \cancel{(t-1)} \ln t \, \frac{dt}{\cancel{(t-1)}}$$

$$= \int_2^{e+1} \ln t \, dt$$

on pose: $\begin{cases} u(x) = \ln t \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{t} \\ v(x) = t \end{cases}$

d'où $I = [t \ln t]_2^{e+1} - \int_2^{e+1} t\left(\frac{1}{t}\right) dt$

$$= [t \ln t]_2^{e+1} - \int_2^{e+1} dt$$

$$= [t \ln t]_2^{e+1} - [t]_2^{e+1}$$

$$= [t \ln t - t]_2^{e+1}$$

$$= (e+1)\ln(e+1) - e - 1$$
$$- 2\ln 2 + 2$$

$$\boxed{I = (e+1)\ln(e+1) - e + 1 - 2\ln 2}$$

Ex3) E_θ : $Z^2 - (6\cos\theta)Z + 4 + 5\cos^2\theta = 0$

1.a°) $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= (6\cos\theta)^2 - 4(1)(4 + 5\cos^2\theta)$$
$$= 36\cos^2\theta - 16 - 20\cos^2\theta$$
$$= 16\cos^2\theta - 16$$
$$= 16(\cos^2\theta - 1)$$
$$= 16(-\sin^2\theta$$

$$\Delta = -16\sin^2\theta$$

$\delta = 4i\sin\theta$

$$z_1 = \frac{6\cos\theta + 4i\sin\theta}{2}$$

$$\boxed{z_1 = 3\cos\theta + 2i\sin\theta}$$

$$z_2 = \frac{6\cos\theta - 4i\sin\theta}{2}$$

$$\boxed{z_2 = 3\cos\theta - 2i\sin\theta}$$

b°) E_θ admet une solution double

$\Delta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow \theta = 0$ ou $\theta = \pi$ $(\theta \in [0, 2\pi])$

$\Leftrightarrow z_1 = 3\cos 0 = 3$

$\Leftrightarrow z_1 = 3$

$z_2 = 3\cos\pi = -3$

$z_2 = -3$

- (E_θ) admet des solution imaginaire

$\Leftrightarrow \cos\theta = 0$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$

$z_{B_1} = 2i\sin\frac{\pi}{2} = 2i$

$z_{B_2} = -2i\sin\frac{\pi}{2} = -2i$

2°) $z_{M_1} = 3\cos\theta + 2i\sin\theta$

$z_{M_2} = 3\cos\theta - 2i\sin\theta$

$\begin{cases} x_{M_1} = 3\cos\theta \\ y_{M_1} = 2\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x_{M_1}}{3}\right)^2 = \cos^2\theta \\ \left(\frac{y_{M_1}}{2}\right)^2 = \sin^2\theta \end{cases}$

Donc:

$$\frac{x_{M_1}^2}{3^2}+\frac{y_{M_1}^2}{2^2}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

Ex 4:

$f(x) = x - \ln x$

1°) $D_f =]0;+\infty[$

comme $f(x)$ est continue et derivable sur D_f.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x-\ln x) = +\infty$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x-\ln x) = +\infty-\infty \text{ F.I}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty(1-0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 1-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x-1}{x}}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ or $f(1)=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

2°) $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$$I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)\,dx$$

a°) $\int_\lambda^1 \ln x\,dx$

on pose:

$$\begin{cases} u(x)=\ln x \\ v'(x)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x} \\ v(x)=x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow I(\lambda) = [x\ln x]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 x\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= [x\ln x]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 dx$$

$$= [x\ln x]_\lambda^1 - [x]_\lambda^1$$

Zeïnebou m/ Mohamed Abderahman

Bac : 2012 SN

Suite exercice 4)

2.a°) $I(\lambda) = [x \ln x - x]_{\lambda}^{1}$

$= -\lambda \ln \lambda + \lambda - 0 - 1$

$$\boxed{I(\lambda) = \lambda - 1 - \lambda \ln \lambda}$$

b°) $I(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} x - \ln x$

$= \int_{\lambda}^{1} x\,dx - \int_{\lambda}^{1} \ln x\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\lambda}^{1} - (\lambda - 1 - \lambda \ln \lambda)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + 1 + \lambda \ln \lambda$

$$\boxed{I(\lambda) = \lambda \ln \lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{3}{2}}$$

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} I(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \left(\lambda \ln \lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{3}{2}\right)$

Donc $\boxed{\lim\limits_{\lambda \to +\infty} I(\lambda) = \frac{3}{2}}$

3°) $n \in \mathbb{N} ; n \geq 2$; $1 \leq k \leq n$

$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

a) $\begin{cases} 1 \leq k \leq n-1 \\ 2 \leq k+1 \leq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{n} \leq \frac{k}{n} \leq \frac{n-1}{n} \\ \frac{2}{n} \leq \frac{k+1}{n} \leq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} < \frac{k}{n} < \frac{k+1}{n} \leq 1$

$\Leftrightarrow \left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right] \subset [0;1]$

or $f(x) \searrow$ sur $[0,1]$

d'où $\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}$

on a $f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$

$\therefore \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt$

$f\left(\frac{k+1}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dt$

$f\left(\frac{k+1}{n}\right) [t]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq f\left(\frac{k}{n}\right) [t]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}$

$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

b°) $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t)dt + \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t)dt$

$+ \dots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$

$S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq S_n - \frac{1}{n} f(1)$

$S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n - \frac{1}{n} f(1) < S_n$

$S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$

$\begin{cases} S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \\ I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \end{cases}$

$\begin{cases} S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \\ I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \end{cases}$

$I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

c°) $\lim\limits_{n \to +\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \left(I\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = \frac{3}{2}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \right) = 0$$

<u>donc</u>: $\lim_{n\to+\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) = \lim \left(I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$$= 3$$

<u>D'aprés T.G</u>

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}$$

Zeinebou m/ Mohamed Abderahman
Bac : 2012 S.C

Exercice 1 :

1°) $P(Z) = Z^3 - (4-2i)Z^2 + (4-6i)Z - 4 + 8i$

a°) $P(-2i) = (-2i)^3 - (4-2i)(-2i)^2 + (4-6i)(-2i) - 4 + 8i$

$= 8i + 16 - 8i - 8i - 12 - 4 + 8i$

$\therefore P(-2i) = 0$

$(Z+2i)(Z^2 + aZ + b)$

	1	$-4+2i$	$4-6i$	$-4+8i$
$-2i$		$-2i$	$8i$	$4-8i$
	1	-4	$4+2i$	0

$\Leftrightarrow P(Z) = (Z+2i)(Z^2 - 4Z + 4 + 2i)$

d'où $a = -4$

$b = 4 + 2i$

b°) $P(Z) = 0$

$(Z+2i)(Z^2 - 4Z + 2i + 4) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} Z + 2i = 0 \\ \text{ou} \\ Z^2 - 4Z + 2i + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z = -2i \\ Z^2 - 4Z + 4 + 2i = 0 \end{cases}$

$\Delta = (4)^2 - 4(1)(4+2i)$

$\Delta = 16 - 16 - 8i = -8i$

$\Delta = (2-2i)^2$

$\delta = 2 - 2i$

$z_1 = \dfrac{4 - 2 + 2i}{2} = \dfrac{2 + 2i}{2}$

$z_1 = 1 + i$

$z_2 = \dfrac{4 + 2 - 2i}{2} = \dfrac{6 - 2i}{2}$

$z_2 = 3 - i$

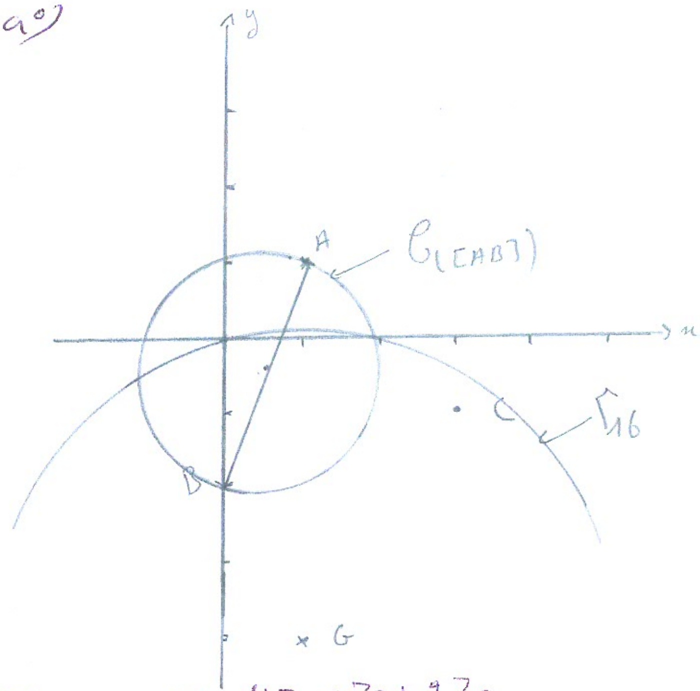
$|1+i| < |-2i| < |3-i|$

$\Leftrightarrow Z_A = 1 + i$

$Z_B = -2i$

$Z_C = 3 - i$

2a°)



b°) $Z_G = \dfrac{3Z_0 - 4Z_A + Z_B + 2Z_C}{2}$

$Z_G = \dfrac{3\times 0 - 4(1+i) - 2i + 2(3-i)}{2}$

$Z_G = \dfrac{0 - 4 - 4i - 2i + 6 - 2i}{2}$

$Z_G = \dfrac{2 - 8i}{2}$

$\boxed{Z_G = 1 - 4i}$

Verification :

$Z_A = \dfrac{5Z_0 - 5Z_B + 2Z_G}{2}$

$= \dfrac{5\times 0 - 5(-2i) + 2(1-4i)}{2}$

$= \dfrac{10i + 2 - 8i}{2}$

$Z_A = 1 + i$

c°) $\frac{z-1-i}{z+2i} \in i\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow z = 1+i$

$\Leftrightarrow M = A$ ou $\arg\left(\frac{MA}{MB}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi]$

$\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}_{[AB]} \setminus \{B\}$

3°) $\varphi(M) = 3MO^2 - 4MA^2 + MB^2 + 2MC^2$

$= 2MG^2 + \varphi(G)$

or $\varphi(G) = 3GO^2 - 4GA^2 + GB^2 + 2GC^2$

$|GO| = |z_O - z_G| = |0 - 1 + 4i| = \sqrt{17}$

$GO^2 = 17$

$|GA| = |z_A - z_G| = |1+i-1+4i| = |5i|$

$|GA| = 5$

$GA^2 = 25$

$|GB| = |z_B - z_G| = |-2i-1+4i| = |-1+2i|$

$|GB| = \sqrt{5}$

$GB^2 = 5$

$|GC| = |z_C - z_G| = |3-i-1+4i| = |2-3i|$

$|GC| = \sqrt{13} \Leftrightarrow GC^2 = 13$

d'où $\varphi(G) = 3\times 17 - 4\times 25 + 5 + 2(13)$

$= 51 - 100 + 5 + 26$

$\boxed{\varphi(G) = -18}$

$M \in \Gamma_k \Leftrightarrow MG^2 = \frac{18+k}{2}$

a°) • si $k < -18 \Leftrightarrow \Gamma_k = \emptyset$

• si $k = -18 \Leftrightarrow \Gamma_k = \{G\}$

• si $k > -18 \Leftrightarrow \Gamma_k\ \mathcal{C}_{(G;\sqrt{\frac{18+k}{2}})}$

b°) $\Gamma_{16} = \mathcal{C}_{(G;\sqrt{17})}$

or $\varphi(O) = -4OA^2 + OB^2 + 2OC^2$

$= -8 + 4 + 20 = 16$

$\Leftrightarrow O \in \Gamma_{16}$

$\Leftrightarrow \Gamma_{16} = \mathcal{C}_{(G,OG)}$

Ex 2)

$f(x) = \frac{1}{x\ln x} \quad x \in \mathbb{R}^{*}_{+} \setminus \{1\}$

1.a°) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x\ln x}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim \left(\frac{1}{x\ln x}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x\ln x}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x\ln x}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0$

Interpretation

$x = 0$ A.V au voisinage de $-\infty$

$x = 1$ A.V au voisinage de ∞

$y = 0$ A.H au voisinage de $+\infty$

b°) comme $f(x)$ est continue et derivable sur D_f.

$f'(x) = -\frac{(1+\ln x)}{(x\ln x)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -e$

T.V de $f(x)$

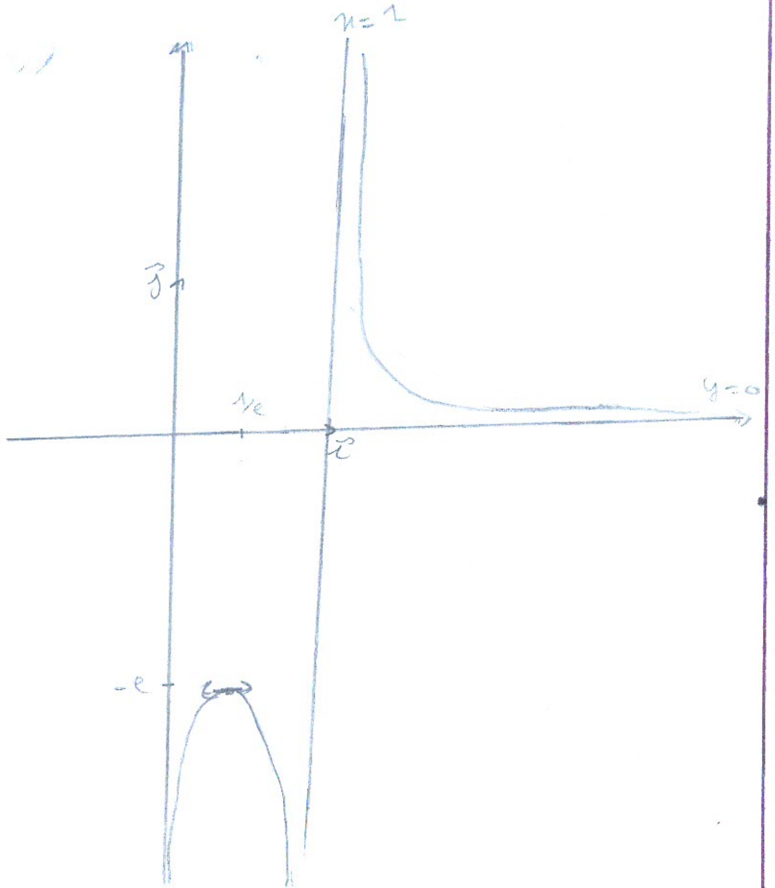
x	0		$1/e$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$ $-\infty$		$+\infty$ $\searrow$	0

Zeinebou ~~my~~ Mohamed Abderahman

Bac 2012 SC

Suite Exercice 2)

c°) la courbe C_f



°) $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\ln k} - n\ln n$

a°) f est décroissante sur $]1,+\infty[$

$n \leq t \leq n+1$

$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$

$\int_n^{n+1} f(n+1)dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \int_n^{n+1} f(n)dt$

$f(n+1)\int_n^{n+1} dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)\int_n^{n+1} dt$

$f(n+1)\,[t]_n^{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)\,[t]_n^{n+1}$

$f(n+1)(n+1-n) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)(n+1-n)$

$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$

$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \frac{1}{n\ln n}$

b°) $U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k\ln k} - \ln(\ln n+1)$

$- \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\ln k} + \ln(\ln n)$

$= \cancel{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\ln k}} + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln(\ln n+1)$

$- \cancel{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\ln k}} + \ln(\ln n)$

$\Leftrightarrow \quad = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - (\ln(\ln n+1) - \ln(\ln$

$= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \int_n^{n+1} f(t)dt \leq 0$

Donc U_n est décroissante

c°) on a pour $n \geq 2$

$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \frac{1}{n\ln n}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \frac{1}{n\ln n} \leq \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \int_n^{n+1} f(t)d$

$\Leftrightarrow f(n+1) - f(n) \leq U_{n+1} - U_n$

on a

$\cancel{f(3)} - f(2) \leq \cancel{U_3} - U_2$

$f(4) - \cancel{f(3)} \leq U_4 - \cancel{U_3}$

$+$

$\cancel{f(n)} - f(n-1) \leq \cancel{U_n} - U_{n-1}$

$f(n+1) - \cancel{f(n)} \leq U_{n+1} - \cancel{U_n}$

$f(n+1) - f(2) \leq U_{n+1} - U_2$

$U_n - \frac{1}{2\ln 2} + \ln(\ln 2) \geq \frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{2\ln 2}$

$U_n + \ln(\ln 2) \geq \frac{1}{n\ln n} \geq 0$

$$\boxed{U_n \geq -\ln(\ln 2)}$$

d°) comme U_n est décroissante et Majorée elle convergante, et on a :

$-\ln(\ln 2) \leq U_n \leq U_2$

$-\ln(\ln 2) \leq U_n \leq \frac{1}{2\ln 2} - \ln(\ln 2)$

Donc :

$-\ln(\ln 2) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq \frac{1}{2\ln 2} - \ln(\ln 2)$

$$\boxed{-\ln(\ln 2) \leq l \leq \frac{1}{2\ln 2} - \ln(\ln(2))}$$

Ex3 : $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{e^x}$

1.a°) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{2x^3}{e^x}\right) = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{e^x}{2x^3}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3}{e^x}\right) = 0$

$y = 0$ A.H au Voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{2x^2}{e^x}\right) = +\infty$

C_f admet une B.P de direction (oy) au Voisinage de $-\infty$

b°) comme $f(x)$ est continue et derivable sur D_f

$f'(x) = \frac{(6x^2 - 6x)e^x - e^x(2x^3 - 3x^2 + 1)}{e^{2x}}$

$e^x(-2x^3 + 9x^2 - 6x - 1)$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-2x^3 + 9x^2 - 6x - 1}{e^x}}$$

$f'(x) = 0 \quad -2x^3 + 9x^2 - 6x - 1 = 0$

on remarque que 1 est une solution de l'équation

	-2	9	-6	-1
1		-2	$+7$	1
	-2	$+7$	1	0

$\Leftrightarrow f'(x) = (x-1)(2x^2 + 7x + 1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ -2x^2 + 7x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -2x^2 + 7x + 1 = 0 \end{cases}$

$\Delta = (49) - 4(-2)(1)$

$\Delta = 57$

$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{57}}{-4} = \frac{7 + \sqrt{57}}{4}$

$x_2 = \frac{7 - \sqrt{57}}{4}$

$f(1) = 0$

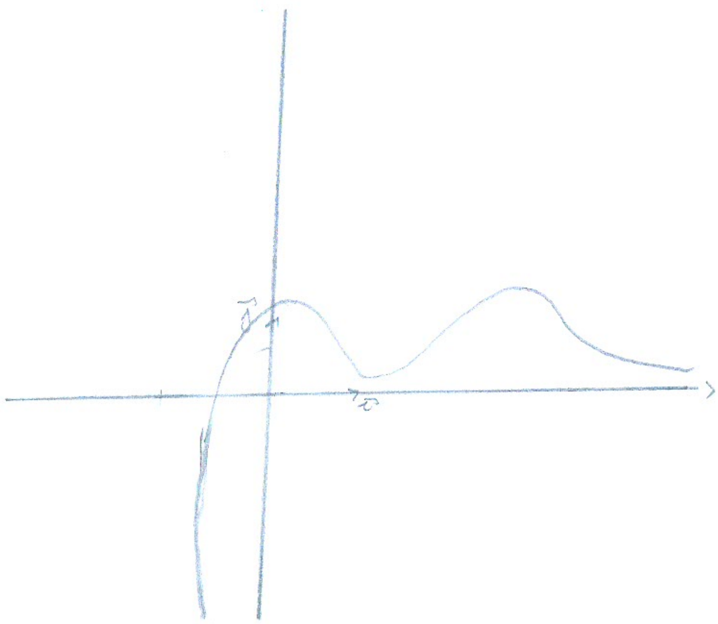
T.V de $f(x)$

x	$-\infty$		x_2		1		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	0

Zeinebou m/ Mohamed Abderahman

Bac 2012 SC

c°) la courbe :



3.a°) $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

la fonction $x^n e^{-x}$ est continue sur son intervalle $[0;1]$ donc I_n est bien définie

b°) $x \in [0,1] \Rightarrow x^n e^{-x} > 0 \Rightarrow I_n \geq 0$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}(x-1)dx \leq 0$

$\Rightarrow I_n$ est décroissante ↘

et comme I_n décroissante minorée par 0 ~~att~~ alors I_n est convergente

c°) $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0$

$\frac{1}{e} \leq e^{-x} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^n}{e} \leq x^n e^{-x} \leq x^n$

$\Rightarrow \frac{1}{e(n+1)} \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} I_n = 0$ (D'après T.G)

4°/a) $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1$

$I_0 = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$

b°) $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

on pose :

$\begin{cases} u(x) = e^{-x} \\ v'(x) = x^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = -e^{-x} \\ v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$

$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} \frac{x^{n+1}}{n+1} dx$

$= \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{1}{e}\right) + \frac{1}{n+1}\int_0^1 e^{-x} x^{n+1} dx$

$= \frac{1}{(n+1)e} + \frac{1}{n+1} I_{n+1}$

$\Rightarrow I_n = \frac{1}{(n+1)e} + \frac{1}{(n+1)} I_{n+1}$

$(n+1) I_n = \frac{1}{e} + I_{n+1}$

$\boxed{I_{n+1} = (n+1) I_n - \frac{1}{e}}$

c°) $A = \int_0^1 f(x) dx$

$= \int_0^1 (2x^3 - 3x^2 + 1) e^{-x} dx$

$= \int_0^1 2x^3 e^{-x} dx \int_0^1 3x^2 e^{-x} dx + \int_0^1 e^{-x} dx$

$= 2\int_0^1 x^3 e^{-x} dx - 3\int_0^1 x^2 e^{-x} dx + \int_0^1 \frac{1}{e^x} dx$

$\boxed{A = 2I_3 - 3I_2 + I_0}$