oumou selemeta / seyid

corrigés Bac 2015 : S.N :

Exercice 01 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) on pose : $p(z) = z^3 - (11+6i)z^2 + (28+38i)z - 12 - 60i$ où z est un nombre complexe.

a) pour calculer $p(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de C :

$p(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$, on peut utiliser la division euclidienne, une identification ou le tableau d'Horner :

	1	$-11-6i$	$28+38i$	$-12-60i$
3		3	$-24-18i$	$12+60i$
	1	$-8-6i$	$4+20i$	0

Alors, $p(3) = 0$ et pour tout z de C : $p(z) = (z-3)(z^2 + (-8-6i)z + 4 + 20i)$

Donc $a = -8-6i$ et $b = 4+20i$

b) L'équation $p(z) = 0$ équivaut à $z - 3 = 0$ ou $z^2 + (-8-6i)z + 4 + 20i = 0$

on a $z - 3 = 0 \Leftrightarrow z = 3$.

Le discriminent de l'équation du second degré est

$\Delta = (-8-6i)^2 - 4(4+20i) = 64 - 36 + 96i - 16 - 80i$

$\Delta = 12 + 16i = (4+2i)^2$ Donc $\delta = 4 + 2i$

Les solutions sont : $z_1 = \frac{8+6i+4+2i}{2} = 6 + 4i$ et $z_2 = \frac{8+6i-4-2i}{2} = 2 + 2i$

Conclusion : L'ensemble de solutions de l'équation $p(z) = 0$ est $S = \{3, 6+4i, 2+2i\}$.

c) Les points A, B et C sont les images des solutions de l'équation $p(z) = 0$ avec $Im(z_A) < Im(z_B) < Im(z_C)$. Donc $z_A = 3$, $z_B = 2+2i$ et $z_C = 6+4i$

G barycentre du système $\{(A;2), (B;-2), (C;2)\}$. G est alors le quatrième sommet du parallélogramme ABCG.

L'affixe de G est : $z_G = \frac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2 - 2 + 2}$

$$z_G = \frac{2(3)-2(2+2i)+2(6+4i)}{2} = \frac{14+4i}{2} = 7+2i$$

2) L'application f_K du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-K)\overrightarrow{MC}$$

cette question sera traitée par deux méthodes : calcul vectoriel ou nombres complexes

<u>Méthode 1 : calcul vectoriel :</u>

a) L'application f_K est une translation si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est constant.

La fonction vectorielle de leibniz ($M \mapsto 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-K)\overrightarrow{MC}$) est constante si et seulement si le poids du système $\{(A;2),(B;-2),(C;3-K)\}$ est nul. ce qui équivaut à $3-K=0$. Soit $K=3$.

Alors, f_K est une translation si et seulement si $K=3$, on obtient son vecteur en remplaçant M dans l'expression vectorielle $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-K)\overrightarrow{MC}$ par n'importe quel point. pour M en C on obtient $\vec{V} = 2\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BA}$

b) Si $K \neq 3$, le poids du système $\{(A;2),(B;-2),(C;3-K)\}$ est non nul. Donc ce système admet un barycentre G_K et on a pour tout point M du plan $2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-K)\overrightarrow{MC} = (3-K)\overrightarrow{MG_K}$. D'où :

$f_K(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = (3-K)\overrightarrow{MG_K}$.

$f_K(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_K} + \overrightarrow{G_KM'} = (3-K)\overrightarrow{MG_K}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{G_KM'} = (2-K)\overrightarrow{MG_K}$

Enfin, $f_K(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{G_KM'} = (K-2)\overrightarrow{G_KM}$

particulièrement, pour $K=2$ on a : $f_2(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{G_2M'} = \vec{0} \Leftrightarrow M' = G_2$

donc l'application f_2 est constante

G_2 est le barycentre du système $\{(A;2),(B;-2),(C;1)\}$. Alors $\overrightarrow{CG_2} = 2\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BA}$. Donc $\overrightarrow{CG_2} = 2\overrightarrow{CG}$. Alors G_2 est le symétrique de C par rapport à G.

Maintenant, si $K \in \mathbb{R} \setminus \{2;3\}$ et M un point invariant par f_K, alors $f_K(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{G_KM} = (K-2)\overrightarrow{G_KM} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_KM} = \vec{0} \Leftrightarrow M = G_K$.

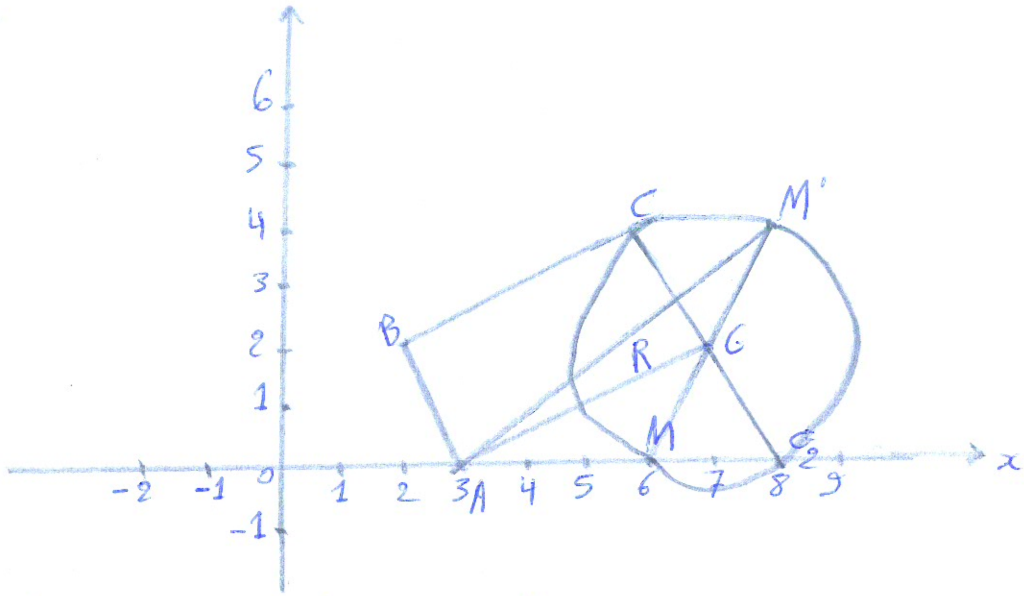
D'où f_K admet un unique point invariant $\omega_K = G_K = \text{bar}$ $\{(A;2),(B;-2),(C;3-K)\}$.
f_K est l'homothétie de centre ω_K et de rapport $K-2$.
c) on a $\omega_K = G_K = \text{bar}\{(A;2),(B;-2),(C;3-K)\}$
Donc $2\overrightarrow{\omega_K A} - 2\overrightarrow{\omega_K B} + (3-K)\overrightarrow{\omega_K C} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{BA} + (3-K)\overrightarrow{\omega_K C} = \vec{0}$

$\overrightarrow{\omega_K C} = \dfrac{2}{3-K}\overrightarrow{AB}$

Alors ω_K est situé sur la droite passant par C et parallèle à (AB).
comme $\frac{2}{3-K} \neq 0$ et $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, on a $\overrightarrow{\omega_K C} \neq \vec{0}$ donc $\omega_K \neq C$.

comme $K \neq 2$, on a $\overrightarrow{\omega_K C} \neq 2\overrightarrow{AB}$ donc $\omega_K \neq G_2$ où G_2 est le point tel que $\overrightarrow{G_2 C} = 2\overrightarrow{AB}$. G_2 est le symétrique de C par rapport à G. C'est aussi le quatrième sommet du parallélogramme $ABGG_2$.
conclusion: Le lieu géométrique des points ω_K lorsque K décrite $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$ est la droite passant par C et parallèle à (AB) privée de C et G_2.
d) Le centre de gravité R du triangle AMM' est le barycentre du système $\{(A;1),(M;1),(M';1)\}$. Alors pour tout point M du plan on a, pour $K=1$:
$3\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + (2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{BC}$
D'où $3\overrightarrow{MR} - 3\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{BC} \iff 3\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{BC}$.
En fin $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. D'où le centre de gravité R du triangle AMM' est un point fixe indépendant de la position de M. Le lieu géométrique de R est un point fixe. on peut aussi remarquer que, pour $K=1$, la transformation f_K est l'homothétie de centre $\omega_1 = \text{bar}\{(A;2),(B,-2),(C;2)\}$ $= G$ et de rapport $K-2=-1$. Alors c'est une symétrie centrale de centre G. Donc G est le milieu du segment $[MM']$.
D'où le barycentre R du système $\{(A;1),(M;1),(M';1)\}$ est celui de $\{(A;1),(G;2)\}$.
Donc $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. Comme $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BC}$ on retrouve le résultat précédent $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
Le centre de gravité R du triangle AMM' est fixe car le milieu G des points variables M et M' est un point fixe



Méthode 2 : Nombres complexes :

a) on désigne par Z et Z' les affixes respectives de M et M'.

$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-K)\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow Z'-Z = 2(Z_A - Z) - 2(Z_B - Z) + (3-K)(Z_C - Z)$

$\Leftrightarrow Z'-Z = 2(3-Z) - 2(2+2i-Z) + (3-K)(6+4i-Z)$

$\Leftrightarrow Z' = Z + 6 - 2Z - 4 - 4i + 2Z + 18 - 6K + 12i - 4Ki - (3-K)Z$

$\Leftrightarrow Z' = (K-2)Z + 20 - 6K + (8-4K)i$

une expression de type $Z' = aZ + b$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$.

Si $K = 3$, on a $Z' = Z + 2 - 4i$ donc f_3 est une translation dont le vecteur a pour affixe $2-4i$. Soit $\vec{V}\binom{2}{-4}$

Si $K \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$, alors $K-2 \neq 0$ et $K-2 \neq 1$. Les points invariants sont d'affixes Z vérifiant $Z' = Z$.

$Z' = Z \Leftrightarrow Z = (K-2)Z + 20 - 6K + (8-4K)i \Leftrightarrow Z = \dfrac{20-6K+(8-4K)i}{3-K}$

D'où f_K admet un unique point invariant ω_K d'affixe $Z_K = \dfrac{20-6K+(8-4K)i}{3-K}$

D'après la forme complexe $Z' = (K-2)Z + 20 - 6K + (8-4K)i$, f_K est l'homothétie de centre ω_K et de rapport $K-2$.

c) L'affixe de ω_K est $Z_K = \dfrac{20-6K+(8-4K)i}{3-K} \Rightarrow \begin{cases} x_K = \dfrac{20-6K}{3-K} = \dfrac{6K-20}{K-3} \\ y_K = \dfrac{8-4K}{3-K} = \dfrac{4K-8}{K-3} \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x_K = 6 - \dfrac{2}{K-3} \\ y_K = 4 + \dfrac{4}{K-3} \end{cases} \Rightarrow 2x + y - 16 = 0$. c'est l'équation d'une droite Δ.

Comme $(x_K, y_K) = \left(6 - \dfrac{2}{K-3}, 4 + \dfrac{4}{K-3}\right)$ avec $\dfrac{2}{K-3} \neq 0$ et $\dfrac{4}{K-3} \neq 0$. on a alors $(x_K, y_K) \neq (6, 4)$. D'où $\omega_K \neq C(6,4)$.

comme $K \neq 2$, on a $(x_K, y_K) \neq (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_K, y_K) \neq \left(6-\frac{2}{2-3}, 4+\frac{4}{2-3}\right) \Rightarrow$ $(x_K, y_K) \neq (8,0)$, donc $\omega_K \neq G_2(8,0)$.

conclusion : Le lieu géométrique des points ω_K lorsque K décrit $\mathbb{R} \setminus \{2;3\}$ est la droite Δ d'équation $2x+y-16=0$ privée de $C(6,4)$ et $G_2(8,0)$

* pour $K=1$, $\omega_1 = G_1 = bar\{(A;2),(B;-2),(C,2)\}$. C'est le quatrième sommet du parallélogramme $ABCG_1$, avec $\begin{cases} x_1 = \frac{14}{2} = 7 \\ y_1 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$. D'où $\omega_1(7,2)$.

d) L'affixe de M' est $z' = (K-2)z + \bar{z_0} = 6K + (8-4K)i$. pour $K=1$, on a $z' = -z + 14 + 4i$. Alors l'affixe du point R centre de gravité du triangle AMM' est $z_R = \frac{z_A + z + z'}{3}$

$z_R = \frac{z + (-z+14+4i)+3}{3}$

$z_R = \frac{17+4i}{3} = \frac{17}{3} + \frac{4}{3}i$. Alors lorsque M décrit le cercle Γ de centre G passant par C, le point R reste fixe.

3) pour tout point M du plan on a $\varphi(M) = 2MA^2 - 2MB^2 + 2MC^2$ et Γ_m l'ensemble des points M tels que $\varphi(M) = m$, où m est un réel

La somme des coefficients est égale à 2 (non nulle). Le barycentre G de ce système est le point $\omega_1(7,2)$

Alors, par transformation d'écriture on obtient l'écriture réduite

$\varphi(M) = 2MG^2 + \varphi(G)$

Donc $M \in \Gamma_m \Leftrightarrow 2MG^2 + \varphi(G) = m$

soit $MG^2 = \frac{m - \varphi(G)}{2}$.

Calculons $\varphi(G)$:

on a $\varphi(G) = 2GA^2 - 2GB^2 + 2GC^2$. on remarque que G est le point $\omega_1(7,2)$.

Donc : $GA^2 = |z_A - z_G|^2 = |3-7-2i|^2 = |-4-2i|^2 = 20$

$GB^2 = |z_B - z_G|^2 = |2+2i-7-2i|^2 = |-5|^2 = 25$

$GC^2 = |z_C - z_G|^2 = |6+4i-7-2i|^2 = |-1+2i|^2 = 5$

Alors $\varphi(G) = 2GA^2 - 2GB^2 + 2GC^2$

$\varphi(G) = 2 \times 20 - 2 \times 25 + 2 \times 5$

En fin $\varphi(G) = 0$. D'où $M \in \Gamma_m \Leftrightarrow MG^2 = \frac{m}{2}$.

Discussion suivant les valeurs de m ;

$m<0$: Γ_m est l'ensemble vide.

$m=0$: Γ_m est le point G

$m>0$: Γ_m est le cercle de centre G et de rayon $r=\sqrt{\frac{m}{2}}$

b) D'aprés les résultats précedents, pour $m=10$; l'ensemble est un cercle de centre G est de rayon $r=\sqrt{\frac{m}{2}}=\sqrt{\frac{10}{2}}=\sqrt{5}$. Comme $GC^2=5$, ce cercle passe par C. Donc Γ_{10} est le cercle de centre G passant par G.

corrigés Bac 2015 : S.N :

Exercice 03 :

$f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

1-a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$ car $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Interprétation graphique :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \Rightarrow (C)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $-\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow (C)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

b) $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$ on constate que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f'		
f	1 $\searrow$	0

$\begin{cases} f \text{ est continue,} \\ \text{et strictement décroissante sur } \mathbb{R}, \\ f(\mathbb{R}) =]0,1[\end{cases}$

Alors $f : \mathbb{R} \to]0,1[$ est bijective ; $J =]0,1[$

Pour exprimer $f^{-1}(x)$, on pose $y = f(x)$.

on a : $y = \frac{1}{1+e^x} \Leftrightarrow y(1+e^x) = 1$

$\Leftrightarrow y + ye^x = 1$

$\Leftrightarrow ye^x = 1-y$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{1-y}{y}$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$

D'où : $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$, $x \in]0,1[$

2.a) on vérifie une égalité du type $f(2a-x)+f(x)=2b$ avec $(a,b)=(0,\frac{1}{2})$ on a : $f(2a-x)=f(-x)=\frac{1}{1+e^{-x}}\times\frac{e^x}{e^x}=\frac{e^x}{e^x+1}$

Donc, $f(2a-x)+f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}+\frac{1}{1+e^x}$

$f(2a-x)+f(x)=\frac{e^x+1}{e^x+1}=1=2\times\frac{1}{2}=2b$

D'où $\omega(0,\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe (c).

b) Les courbes (c) et (c') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$. S'il se coupent en un point d'abscisse x, alors x vérifie $f(x)=x$, soit $f(x)-x=0$. on pose $V(x)=f(x)-x$

V est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, avec $V'(x)=f'(x)-1$.

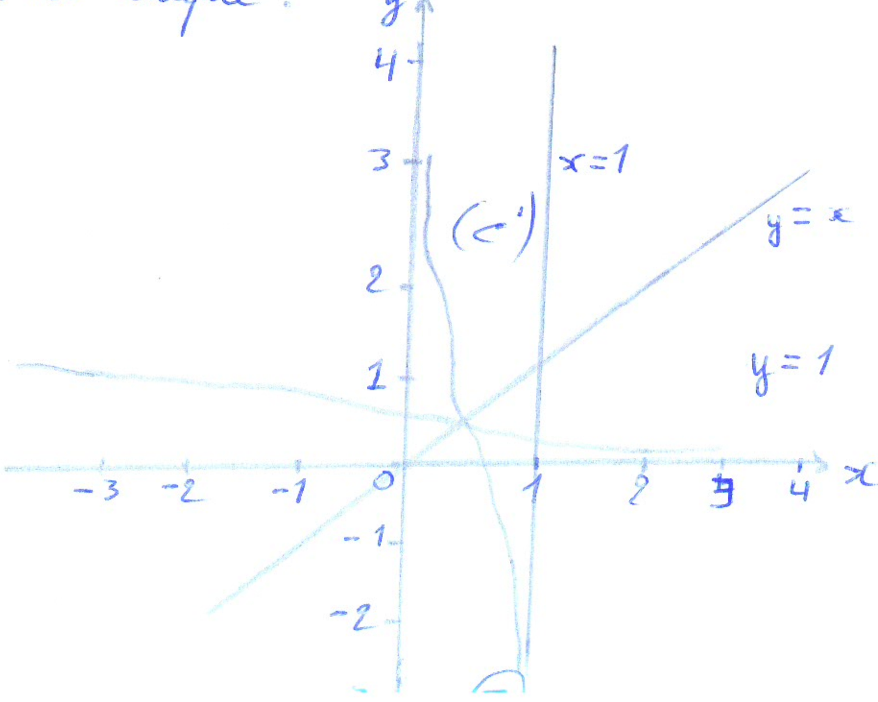
$V'(x)=\frac{-e^x}{(1+e^x)^2}-1=-\left[1+\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right]$.

Il est clair que pour tout x de $\mathbb{R}$, $V'(x)<0$. D'où V est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

on a

$$\begin{cases} V(0,4)\simeq 1,3\times10^{-3}>0 \\ V(0,5)\simeq -0,12<0 \end{cases}$$

Donc $V(0,4)\times V(0,5)<0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $V(x)=0$ admet une solution α telle que $0,4<\alpha<0,5$. (V est continue sur $[0,4;0,5]$ et change de signe). D'après le théorème de la bijection réciproque (V est continue et strictement monotone), la solution α est unique.



d) par symétrie, l'aire cherchée A est égale au double de l'aire comprise entre (c) la droite $y=x$ et les droites verticales d'équations $x=\alpha$ et $x=0$ (l'axe oy).

$A = 2\int_0^\alpha (f(x)-x)\,dx$

$A = 2\int_0^\alpha (f(x)-x)\,dx$

$A = 2\int_0^\alpha \left(\frac{1}{e^x+1} - x\right) dx$

$A = 2\int_0^\alpha \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} - x\right) dx$

$A = -2\int_0^\alpha \left(\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} + x\right) dx$

$A = -2\left[\ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{2}x^2\right]_0^\alpha$

$A = 2\left[-\ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{2}x^2\right]_0^\alpha$

$A = 2\left(-\ln(1+e^{-\alpha}) - \frac{1}{2}\alpha^2 + \ln 2\right)$

$A = -2\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{2}\right) - \alpha^2$

$A = 2\ln\left(\frac{2e^\alpha}{1+e^\alpha}\right) - \alpha^2$ en unité d'aire.

3) on a $I_n = \int_0^\alpha f^n(t)\,dt$

a) $I_1 = \int_0^\alpha f(t)\,dt$

$I_1 = \int_0^\alpha \frac{1}{e^t+1}\,dt$

$I_1 = \int_0^\alpha \frac{1}{e^t+1} \times \frac{e^{-t}}{e^{-t}}\,dt$

$I_1 = -\int_0^\alpha \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt$

$I_1 = \left[-\ln(1+e^{-t})\right]_0^\alpha$

$I_1 = -\ln(1+e^{-\alpha}) + \ln 2$

$I_1 = -\ln\left(\frac{e^\alpha+1}{e^\alpha}\right) + \ln 2$

$I_1 = \ln\left(\frac{1}{e^\alpha+1}e^\alpha\right) + \ln 2$

$I_1 = \ln(\alpha e^\alpha) + \ln 2$ car $f(\alpha) = \alpha \Rightarrow \frac{1}{e^\alpha+1} = \alpha$

$I_1 = \ln(\alpha) + \ln e^\alpha + \ln 2$

$I_1 = \alpha + \ln(2\alpha)$

3.a) on a : $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$

$f^2(x) - f(x) = \frac{1}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{1+e^x} \times \frac{1+e^x}{(1+e^x)}$

$= \frac{1}{(1+e^x)^2} - \frac{1+e^x}{(1+e^x)^2}$

$= \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} = f'(x)$

Donc : $f'(x) = f^2(x) - f(x)$

c) D'après b), en multipliant par $f^{n-1}(x)$ on obtient : $f'(x)f^{n-1}(x)$
$= f^{n+1}(x) - f^n(x)$ par intégration de 0 à α : $\int_0^\alpha f'(x)f^{n-1}(x)\,dx$
$= \int_0^\alpha f^{n+1}(x)\,dx - \int_0^\alpha f^n(x)\,dx$

$\left[\frac{1}{n}f^n(x)\right]_0^\alpha = I_{n+1} - I_n$

$\frac{1}{n}\left(f^n(\alpha) - f^n(0)\right) = I_{n+1} - I_n.$

$\frac{1}{n}\left(\alpha^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = I_{n+1} - I_n$

$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$

d) on a $\alpha > 0$ et pour tout entier naturel non nul n, f^n est continue et positive sur $[0, \alpha]$. Alors $\int_0^\alpha f^n(t)\,dt \geq 0$. D'où $I_n \geq 0$. Donc (I_n) est positive.

D'autre part, pour tout entier naturel non nul n on a :

$0 < \alpha < 0{,}5 \Rightarrow 0 < \alpha^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \alpha^n < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \alpha^n - \frac{1}{2^n} < 0 \Rightarrow I_{n+1} - I_n < 0$

D'où (I_n) est décroissante.

on en déduit que la suite (I_n) est convergente, car décroissante et minorée.

Remarque : Toute suite positive est minorée par 0, et toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

4. a) on sait que f est décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc, si $0 \leq t \leq \alpha$, on a : $f(\alpha) \leq f(t) \leq f(0)$ donc $\alpha \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$ et $\alpha > 0 \Rightarrow 0 < \alpha^n \leq f^n(t) \leq \frac{1}{2^n}$

$$\Rightarrow \int_0^\alpha \alpha^n \, dt \leq \int_0^\alpha f^n(t)\,dt \leq \int_0^\alpha \frac{1}{2^n}\,dt$$

$$\alpha^n [t]_0^\alpha \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}[t]_0^\alpha$$

$$\alpha^n(\alpha - 0) \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}(\alpha - 0)$$

$$\alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$$

comme $0 < \alpha < 1$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^{n+1} = 0$. on a aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0$

Alors d'aprés le théoréme de gendarme : $\lim\limits_{x \to +\infty} I_n = 0$

b) on a pour tout $n > 0$: $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$

Donc :

$$\begin{cases} \text{pour } n = 1 : I_2 - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \\ \text{pour } n = 2 : I_3 - I_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right) \\ \text{pour } n = 3 : I_4 - I_3 = \frac{1}{3}\left(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}\right) \\ \quad \vdots \\ \text{pour } n-1 : I_n - I_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \end{cases}$$

par addition membre à membre et simplification :

$$I_n - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3}\left(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$I_n = I_1 + \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{K}\left(\alpha^K - \frac{1}{2^K}\right)$$

$$I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{K}\left(\alpha^K - \frac{1}{2^K}\right).$$

on peut écrire $I_n - (\alpha + \ln(2\alpha)) = \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{K}\left(\alpha^K - \frac{1}{2^K}\right)$.

par passage aux limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{K}\left(\alpha^K - \frac{1}{2^K}\right) = \lim_{n\to+\infty} I_n - \lim_{n\to+\infty} (\alpha + \ln(2\alpha)).$$

comme $\lim_{x\to+\infty} I_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}(\alpha + \ln(2\alpha)) = \alpha + \ln(2\alpha)$ car indépendant de n ; on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{K}\left(\alpha^K - \frac{1}{2^K}\right) = -(\alpha + \ln(2\alpha))$.

corrigés Bac 2015 : S. N :

Exercice 4 :

1. a) pour la transformation d'écriture de $g(x)$, on factorise le dénominateur et le numérateur :
on factorise le denominateur par x : $x^3-4x^2+5x = x(x^2-4x+5)$
pour factorise le numérateur on peut utiliser la division euclidienne, l'identification ou le tableau d'Horner :

	3	-12	19	-10
1		3	-9	10
	3	-9	10	0

Alors $3x^3-12x^2+19x-10 = (x-1)(3x^2-9x+10)$.
Donc on a pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $g(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2-9x+10)}{x(x^2-4x+5)}$

Alors : $a=3$, $b=-9$ et $c=10$

b) Les discriminants des trinôme $3x^2-9x+10$ et x^2-4x+5 sont négatifs : $\Delta_1=-39$ et $\Delta_2=-4$. Les coefficients de x^2 sont positifs. on en déduit que pour tout x de $\mathbb{R}^*$:
$3x^2-9x+10>0$ et $x^2-4x+5>0$. D'où le signe de $g(x)$ est celui de $\frac{x-1}{x}$.

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$		
x	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x-1}{x}$	$+$	$-$	$+$
$g(x)$	$+$	$-$	$+$

2. a) on a $\lim\limits_{x\to 0}(3x-3)=-3$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right)=+\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$
La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

b) on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right)=0$. Donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(3x-3)$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

c) D'après a), la courbe (c) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$

De plus $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(3x-3)) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)=0$, donc la courbe (c) admet une asymptote oblique D d'équation $y=3x-3$

pour étudier la position relative de (c) et de D, on étudie le signe de

$d(x)=f(x)-y=f(x)-(3x-3)$

$d(x)=\ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)$

on rappelle que le signe de $\ln t$ est celui de $t-1$ pour tout $t>0$. Alors le signe de $d(x)=\ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)$ est celui de $\frac{x^2-4x+5}{x^2}-1$.

par réduction au même dénominateur : $\frac{x^2-4x+5}{x^2}-1=\frac{x^2-4x+5-x^2}{x^2}=\frac{-4x+5}{x^2}$

Donc le signe de $d(x)$ est celui de $-4x+5$ car $x^2>0$.

x	$-\infty$	0	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$-4x+5$	+	+	—	
$d(x)$	+	+	—	
P. R	C/D	C/D	D/C	

pour $x=\frac{5}{4}$ on a $y=3\times\frac{5}{4}-3=\frac{3}{4}$. Alors l'asymptote D coupe la courbe (c) au point $\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$

3. a) on peut écrire $f(x)=3x-3+\ln(x^2-4x+5)-\ln(x^2)$

$f(x)=3x-3+\ln(x^2-4x+5)-2\ln x$. Donc $f'(x)=3+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{2}{x}$

$f'(x)=3+\frac{(2x-4)x-2(x^2-4x+5)}{x(x^2-4x+5)}$

$f'(x)=\frac{3(x^3-4x^2+5x)+2x^2-4x-2x^2+8x-10}{x^3-4x^2+5x}$

$f'(x)=\frac{3x^3-12x^2+15x+4x-10}{x^3-4x^2+5x}$

$f'(x)=\frac{3x^3-12x^2+19x-10}{x^3-4x^2+5x}$

En fin $f'(x)=g(x)$

Tableau de variation de f:
Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$:

x	$-\infty$ 0	1 $+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow \ln 2$	$\ln 2 \nearrow +\infty$

b) Sur l'intervalle $]0,+\infty[$, on a $f(x) \geq \ln 2 > 0$. Donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution dans cet intervalle.
Sur l'intervalle $]-\infty,0[$, la restriction de f est continue, strictement monotone et change de signe car $0 \in f(]-\infty,0[) =]-\infty,+\infty[$ Donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans cet intervalle
Alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}^*$
pour encadrer α: $\left| \begin{array}{l} f(-1) = -6+\ln 10 < 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty \end{array} \right.$

$\left| \begin{array}{l} f(-0,5) = -4,5+\ln 29 < 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty \end{array} \right\rangle \Rightarrow -0,5 < \alpha < 0$ C'est un encadrement de α d'amplitude 5×10^{-1}

4. a) on a

$$2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+(x-2)^2}\right) = 2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+x^2-4x+4}\right)$$
$$= 2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{x^2-4x+5}\right) = 2\left(1+\frac{2x-4-1}{x^2-4x+5}\right) = 2\left(\frac{x^2-4x+5+2x-5}{x^2-4x+5}\right)$$
$$= 2\left(\frac{x^2-2x}{x^2-4x+5}\right) = \frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}$$

Alors $\dfrac{2x^2-4x}{x^2-4x+5} = 2\left(1+\dfrac{2x-4}{x^2-4x+5}-\dfrac{1}{1+(x-2)^2}\right)$

b) $A = \displaystyle\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx = \left[\ln|x^2-4x+5|\right]_3^{2+\sqrt{3}}$ car une primitive de fonction de type $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$.
En remplaçant par les bornes:
$A = \ln|(2+\sqrt{3})^2-4(2+\sqrt{3})+5| - \ln|(3)^2-4(3)+5| = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$

c) En posant $x = 2 + \tan t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$; on a :

$$\begin{cases} x = 3 \Leftrightarrow 2 + \tan t = 3 \Leftrightarrow \tan t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow 2 + \tan t = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan t = \sqrt{3} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$x = 2 + \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t)\, dt$

$x = 2 + \tan t \Rightarrow 1 + (x-2)^2 = 1 + \tan^2 t$

pour calculer $B = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\, dx$, on remplace avec le changement de variable :

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2 t}(1+\tan^2 t)\, dt$$

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt$$

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\, dx = [t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\, dx = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

Enfin $B = \frac{\pi}{12}$

d)

i) pour calculer $J = \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2 - 4x + 5)\, dx$ à l'aide d'une intégration par parties, on pose $\begin{cases} u(x) = \ln(x^2 - 4x + 5) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

Alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+5} \\ v(x) = x \end{cases}$

D'où $J = [x \ln(x^2 - 4x + 5)]_3^{2+\sqrt{3}} - \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 5}\, dx$

on remplace dans la première partie par les bornes, et dans l'intégrale par l'expression trouvée en 4.a) :

$$J = (2+\sqrt{3}) \ln\left((2+\sqrt{3})^2 - 4(2+\sqrt{3}) + 5\right) - 3 \ln\left((3)^2 - 4(3) + 5\right) - \int_3^{2+\sqrt{3}} 2\left[1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2}\right] dx$$

$$J = (2+\sqrt{3}) \ln 4 - 3 \ln 2 - 2\left[\int_3^{2+\sqrt{3}} dx + \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\, dx - \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\, dx\right]$$

D'après 4.b) et 4.c) on obtient :

$J = (2+\sqrt{3})\ln 2^2 - 3\ln 2 - 2\left([x]_3^{2+\sqrt{3}} + A - B\right)$

$J = 2(2+\sqrt{3})\ln 2 - 3\ln 2 - 2\left(2+\sqrt{3} - 3 + \ln 2 - \frac{\pi}{12}\right)$

$J = (1+2\sqrt{3})\ln 2 - 2\left(-1+\sqrt{3} + \ln 2 - \frac{\pi}{12}\right)$

$J = (1+2\sqrt{3})\ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} - 2\ln 2 + \frac{\pi}{6}$

$J = (-1+2\sqrt{3})\ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$

ii) pour calculer $K = 2\int_2^{2+\sqrt{3}} \ln dx$ à l'aide d'une intégration par parties, on pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$

D'où $K = 2\left([x\ln x]_3^{2+\sqrt{3}} - \int^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{x}\, x\, dx\right]$

$K = 2\left([x\ln x]_3^{2+\sqrt{3}} - \int_3^{2+\sqrt{3}} dx\right]$

$K = 2\left([x\ln x]_3^{2+\sqrt{3}} - [x]_3^{2+\sqrt{3}}\right) \Rightarrow K = 2\left([x\ln x - x]_3^{2+\sqrt{3}}\right)$

$K = 2\left((2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3}) - 3\ln 3 + 3\right) \Rightarrow K = 2\left((2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 1 - \sqrt{3} - 3\ln 3\right)$

$K = (4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 2 - 2\sqrt{3} - 6\ln 3$

iii) pour calculer l'aire S du domaine delimité par la courbe (c) et les droites d'équations respectives : $y = 3x-3$, $x=3$ et $x = 2+\sqrt{3}$; on remarque que pour $x \geq 3$, la droite d'équation $y = 3x - 3$ est au dessus de la courbe.

Alors $S = \int_3^{2+\sqrt{3}} (y - f(x))\,dx = -\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)dx$

$S = -\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2-4x+5)\,dx + \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2)\,dx$. Donc $S = -J + K$

$S = -\left[(-1+2\sqrt{3})\ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right] + \left((4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 2 - 2\sqrt{3} - 6\ln 3\right)$

$S = (1-2\sqrt{3})\ln 2 - 2 + 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} + (4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 2 - 2\sqrt{3} - 6\ln 3$

$S = (1-2\sqrt{3})\ln 2 + (4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) - 6\ln 3 - \frac{\pi}{6}$ en unité d'aire.

$S = 1{,}0066$ en unité d'aire.