Nom : Marieme Dede chemra

Gr : 2

EX3 : Bac 2011 S.N

f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1) a) calcul le limite de f.

$$* \lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \lim_{-\infty} \frac{\cancel{e^{-x}}(e^{2x} - 1)}{\cancel{e^{-x}}(e^{2x} + 1)} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

$y = -1$ AH au voisinage de $(-\infty)$

$$* \lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{\cancel{e^x}(1 - e^{-2x})}{\cancel{e^x}(1 + e^{-2x})} = \lim_{+\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$$

$= \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$; $y = 1$ AH au voisinage de $(+\infty)$.

$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \Rightarrow x \in D_f, -x \in D_f \\ f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -f(x) \end{cases}$$

donc f est impaire.

Le variation de f.

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{(e^{2x} + 2e^{-x}e^x + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2e^{-x}e^x + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

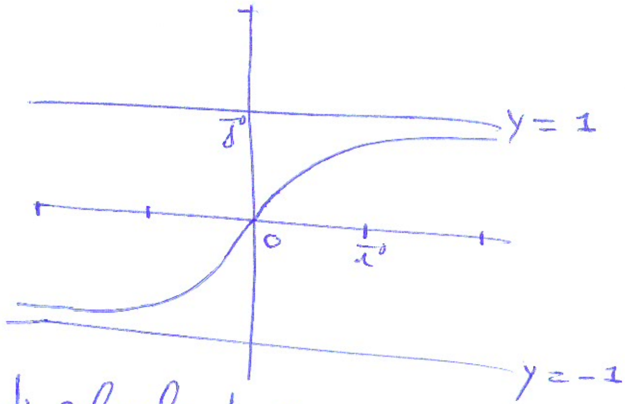
$$f'(x) = \frac{4e^{-x}e^x}{(e^x + e^{-x})^2} =$$

$$\frac{4}{\quad} > 0 .$$

T.V de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1 ↗	1

c) La courbe de f (C_f).



d) calcule de A

$$A = \int_0^{\ln 3} f(x)\,dx = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$$

$$= \left[\ln(e^x + e^{-x})\right]_0^{\ln 3}$$

$$= \ln\left(3 + \frac{1}{3}\right) - \ln(1 + 1) = \ln \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow A = \ln \frac{5}{3} \text{ u.a}$$

2) on définie la suite (U_n) par :

$$U_n = \int_0^{\ln 3} (f(t))^n\,dt$$

a) calcul de $U_1 = \int_0^{\ln 3} f(t)\,dt = A$

$$\Rightarrow U_1 = \frac{5}{3}$$

Nom : Marieme Dede chemra

Gr : 2

Suite d'exo3 Bac 2011 S.N.

2) b) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$ on'a

$0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \ln 3$

- on sait que f est $\nearrow$ sur $[0, \ln 3]$

alors $\forall t \in [0, \ln 3]$

$f(0) \leq f(t) \leq f(\ln 3) \Rightarrow 0 \leq (f(t))^n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$\Rightarrow \int_0^{\ln 3} 0 \, dt \leq \int_0^{\ln 3} (f(t))^n dt \leq \int_0^{\ln 3} \left(\frac{4}{5}\right)^n dt$

$\Rightarrow 0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot [t]_0^{\ln 3}$

$\Rightarrow 0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \ln 3$

- Comme $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ alors

d'après T.G $\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 0}$

c) Verifions que pour tout $x \geq 0$

$1 - \cancel{2}f'(x) = (f(x))^2$

$1 - f'(x) = 1 - \frac{4e^{-x}e^x}{(e^x+e^{-x})^2} =$

$= \frac{(e^x+e^{-x})^2 - 4e^{-x}e^x}{(e^x+e^{-x})^2}$

$= \frac{e^{2x} + 2e^{-x}e^x + e^{-2x} - 4e^{-x}e^{x}}{(e^x+e^{-x})^2}$

$= \frac{e^{2x} - 2e^{-x}e^x + e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$

$= (f(x))^2$.

$\forall n \geq 0$

$U_{n+2} - U_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

$U_{n+2} - U_n = \int_0^{\ln 3} (f(t))^{n+2} dt - \int_0^{\ln} (f(t))^n dt$

$= \int_0^{\ln} \left((f(t))^{n+2} - (f(t))^n\right) dt$

$= \int_0^{\ln 3} \left(f^n(t)\left((f(t))^2 - 1\right)\right) dt$

$= \int_0^{\ln 3} \left(f^n(t)\left(-f'(t)\right)\right) dt$

$= -\int_0^{\ln 3} \left(f'(t) \times f^n(t)\right) dt$

$= \left[-\frac{1}{n+1} f^{n+1}(t)\right]_0^{\ln 3}$

$= -\frac{1}{n+1}\left[(f(\ln 3))^{n+1} - (f(0))^{n+1}\right]$

$= \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

alors $\forall n \geq 0$, $U_{n+2} - U_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

d) pour tout $n \geq 0 \in \mathbb{N}$

- Mq : $U_{2n} = \ln 3 - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$

on applique la relation demontré dans la question 2) c) :

$\forall k \geq 2 \quad U_k - U_{k-2} = \frac{-1}{k-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$

pour les termes consècutifs d'indices paires de la suite (U_n), termes d'indices $k = 2p$ et $k-2 = 2p-2$, $p \in \mathbb{N}^*$

Nom : Marième Dede chemra

Gr : 2 :

suite d'exo 3 : Bac : 2011 : S N

Donc $\forall p \geq 1 \quad U_{2p} - U_{2p-2} = \frac{-1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$

$$\begin{cases} p=1 : \cancel{U_2} - U_0 = \frac{-1}{2\times1-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2\times1-1} \\ p=2 : \cancel{U_4} - \cancel{U_2} = \frac{-1}{2\times2-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2\times2-1} \\ p=3 : \cancel{U_6} - \cancel{U_4} = \frac{-1}{2\times3-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2\times3-1} \\ \dots \quad \cancel{\dots} - \dots = \dots \\ \dots : \dots - \dots = \dots \\ \dots : \cancel{\dots} - \dots = \dots \\ p=2n : U_{2n} - \cancel{U_{2n-2}} = \frac{-1}{2n-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n-1} \end{cases}$$

en additionnant et simplifient membranes a membranes on obtient

$U_{2n} - U_0 = \sum_{p=1}^{n} \frac{-1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$ or

$U_0 = \int_0^{\ln 3} (f(t))^0 \, dt = [t]_0^{\ln 3} = \ln 3$

donc $U_{2n} = \ln 3 - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$

montrons de m̂ que

$U_{2n+1} = \ln \frac{5}{3} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p}$

on applique la rèlation de montre dans la question 2) c) :

$\forall k \geq 2 : U_k - U_{k-2} = \frac{-1}{k-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$

pour le terme successifs d'indices impaires de la suite (U_n), termes d'indices $k = 2p+1$ et $k-2 = 2p-1$, $p \in \mathbb{N}^*$

donc $U_{2p+1} - U_{2p-1} = \frac{-1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p} \; \forall p \geq 1$

alors :

$$\begin{cases} p=1 : \cancel{U_3} - U_1 = \frac{-1}{2\times1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2\times1} \\ p=2 : \cancel{U_5} - \cancel{U_3} = \frac{-1}{2\times2}\left(\frac{4}{5}\right)^{2\times2} \\ p=3 : \cancel{U_7} - \cancel{U_5} = \frac{-1}{3\times2}\left(\frac{4}{5}\right)^{3\times2} \\ \vdots \quad \cancel{\dots} - \dots = \dots \\ \vdots \quad \cancel{\dots} - \dots = \dots \\ \vdots \quad \cancel{\dots} - \dots = \dots \\ p=2n : U_{2n+1} - \cancel{U_{2n-1}} = \frac{-1}{2n}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n} \end{cases}$$

en additionnant et simplifient membres à membres on obtient :

$U_{2n+1} - U_1 = \sum_{p=1}^{n} \frac{-1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p}$ or $U_1 = \ln\frac{5}{3}$

Donc $U_{2n+1} = \ln\frac{5}{3} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p}$

d) pour tout entier naturelle $n \geq 0$ on pose :

$S_n = \frac{4}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^4 + \dots + \frac{1}{2n}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n} = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p}\left(\frac{4}{5}\right)^p$

calcule de limite de la suite S_n

~~on a $S_n = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1} = -U_{2n} + \ln 3$ et~~

~~$\sum_{p=1}^{n}$~~

Nom : Marieme Dede chemra

Gr 2 :

suite d'exo 3 : Bac 2011 S.N

calcule de la limite (S_n) :

on a $S_n = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p}\left(\frac{4}{5}\right)^p = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$.

or d'après la question 2)d) on a :

$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1} = -U_{2n} + \ln 3$ et

$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p} = -U_{2n+1} + \ln \frac{5}{3}$

Alors $S_n = -U_{2n} + \cancel{\ln 3} - U_{2n+1} + \ln 5 - \cancel{\ln 3}$

et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

alors $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \ln 5}$.

FIN...