Nom= Lalla Radia Kader (LRK)

Class= 7C1

Anneé = 2016 - 2017

Baccalauréat 2011

Session Normale

Solution Rapide :

Exercice 1 = (4 pts).

1°) - $P(z) = z^3 - (1+2\cos\theta)z^2 + (1+2\cos\theta)z - 1$

a) $P(1) = 1^3 - (1+2\cos\theta)\times 1^3 + (1+2\cos\theta)\times 1 - 1$

$= 1 - 1 - 2\cos\theta + 1 + 2\cos\theta - 1$

$\boxed{P(1) = 0}$

tableau d'Horner =

	1	$1-2\cos\theta$	$1+2\cos\theta$	-1
1		1	$-2\cos\theta$	1
	1	$-2\cos\theta$	1	0

$P(z) = (z-1)(z^2 - 2\cos\theta z + 1)$

$P(z) = 0 \iff (z-1)(z^2 - 2\cos\theta z + 1) = 0$

Soit $z - 1 = 0 \Rightarrow z_0 = 1$

ou $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$

$$\begin{cases} x = -1 + 2\cos\theta \\ y = -4\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = \frac{x+1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-1}{4} y \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\iff \boxed{\left(\frac{x+1}{2}\right) + \left(-\frac{y}{4}\right) = 1}$$

b)- Soient (x,y) les coordonneés et considérons le point $(-1,0)$;

cordonneé $(X;Y)$ de G vérifient : $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{16} = 1$ car

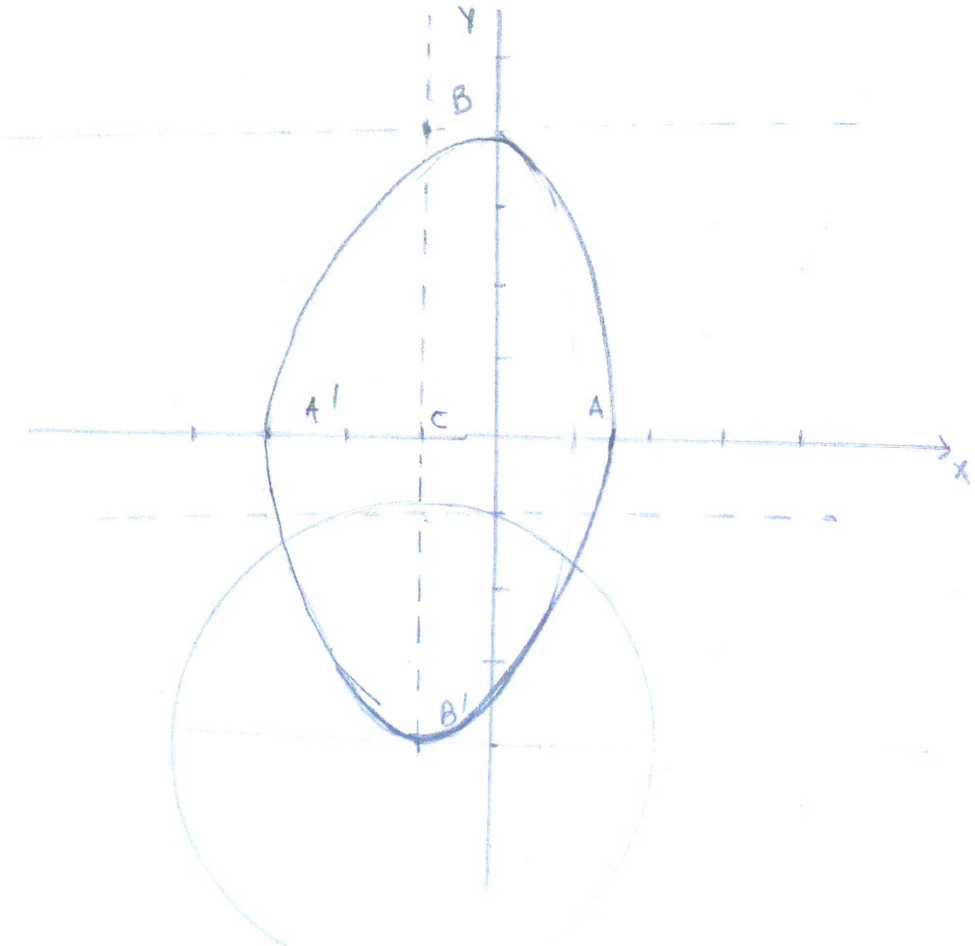
$$\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y \end{cases}$$

Comme $b = 4 > 2 = a$, alors les éléments caractéristiques (dans le repeŕe $(O, \vec{u}, \vec{v})$) sont : $\omega(-1,0)$.

- le centre
- les sommets :

- Dans le repeŕe $(\omega, \vec{u}, \vec{v})$ les sommets sont :

$A(2,0)$; $A'(-2,0)$, $B(0,4)$ et $B'(0,-4)$.



- Donc dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les sommets sont

$A(1,0)$, $A'(-3,0)$, $B(-1;4)$ et $B'(-1,-4)$

- $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$
- L'excentricité : $e = \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Construction de Γ

4) Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ alors

- $Z_0 = 1 \Rightarrow M_0(1,0)$
- $Z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow M_1(0,1)$
- $Z_2 = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow M_0(0,-1)$

Alors $Z_G = -1 + 2\cos\frac{\pi}{2} - 4i\sin\frac{\pi}{2} = -1-4i \Rightarrow G(-1;-4)$

$\Rightarrow G = B'$

b)- $MM_0^2 + MM_1 - 3MM_2^2 = 6$

$\varphi(M) = MM_0^2 + MM_1 - 3MM_2^2$

Donc $M \in \Gamma' \Leftrightarrow -MG^2 + \varphi(G) = 6$

$\varphi(G) = GM_0^2 + GM_1^2 - 3GM_2^2$

$GM_0^2 = |z_0 - z_G|^2 = (-1-1)^2 + (-4-0)^2 = 20$

$GM_1^2 = |z_1 - z_G|^2 = (0+1)^2 + (1+4)^2 = 26$

$GM_2^2 = |z_0 - z_G|^2 = (0+1)^2 + (-1+4)^2 = 10$

Alors $\varphi(G) = 16$ d'où Γ' est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{10} = GM_2$

Exercice 2 : (4 pts)

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = x(1-\ln x) & si\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1 a-) -

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x(1-\ln x) = \lim_{x\to 0^+} (x - x\ln x) = 0-0=0$$

alors f est continue en 0^+

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(1-\ln x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} (1-\ln x)$$

$$= \boxed{1 + \infty = +\infty}$$

Donc f n'est pas dérivable en 0^+

* Interprétation graphique : la courbe f admet , a droite de 0 , une démi tangente verticale dirigeé vers le haut

b) - Les variations de f :

- Les limites de f aux bornes de son domaine de définition

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) : \left| \begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim (1-\ln x) = -\infty \end{array}\right. \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

- La dérivée de f :

$$f'(x) = 1 - \ln x + x \times \frac{-1}{x} = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$

D'ou $\begin{cases} f'(x) \leq 0, & x \geq 1 \\ f'(x) \geq 0, & x \in [0,1] \end{cases}$

$f'(1) = 0$ et $f(1) = \boxed{1(1-\ln 1) = 1}$

- Tableau de variation de f :

X	0		1		$+\infty$
$f'(X)$		$+$	0	$-$	
$f(X)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

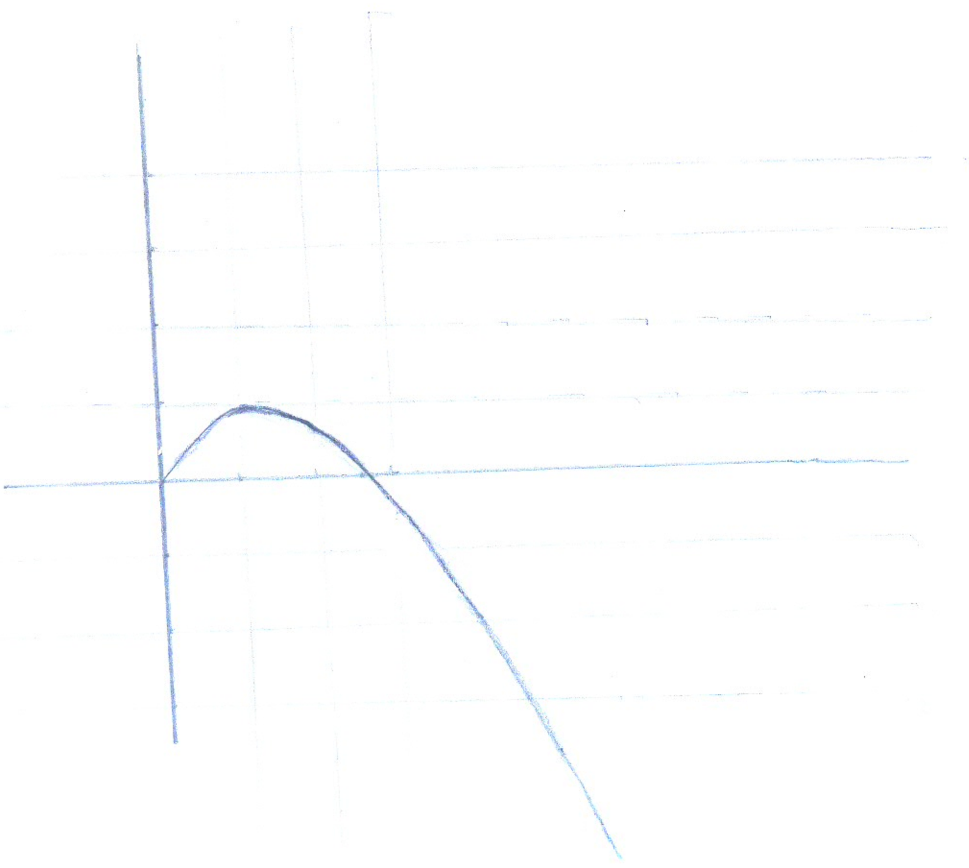
c)- Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim \frac{f(x)}{X} = \lim \frac{X(1-\ln x)}{X} = \lim\limits_{x \to +\infty} (1-\ln X) = 1-\infty = -\infty$$

- Donc la courbe de f admet au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction (Oy)

- L'intersection de (c) avec l'axe (OX) :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow X(1-\ln X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln X = 1 \Leftrightarrow X = e \\ \text{ou } X = 0 \end{cases}$$



2). Soit f_n la fonction definie pour $n \geqslant 1$ par

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n(1-\ln x) & x>0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

; et (C_n) sa courbe representative dans un repere orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

a). La continuité de f_n à droite en 0, pour $n \geqslant 2$

$$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim_{x \to 0^+} x^n(1-\ln x) = \lim_{x \to 0^+} (x^n - x^n \ln x) = 0-0=0$$

alors f_n est continue en 0^+

- La dérivabilité de f à droite en 0, pour $n \geqslant 2$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(1-\ln x) - 0}{x-0} = \boxed{\lim x^{n-1} - x^{n-1}\ln x = 0-0=0}$$

Donc f_n est pas dérivable en 0^+

<u>Interprétation graphique</u> : La courbe de f_n admet, à droite de 0, une demi-tangente horizontale d'equation $y=0$.

b. Les variations de f_n :

- Les limites de f_n aux bornes de son domaine de définition :

$$\lim_{x\to +\infty} f_n(x) : \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (1-\ln x) = -\infty \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = 0$$

- <u>La dériveé de f_n</u>

$$f_n'(x) = nx^{n-1}(1-\ln x) + x^n \times \frac{-1}{x} = x^{n-1}(n-1-n\ln x)$$

D'où :

$$\forall n \geq 1,\ f_n'(x) = 0 \iff \begin{cases} \text{soit } n\ln x = n-1 \iff \ln x = \dfrac{n-1}{n} \iff x = e^{\frac{n-1}{n}} \\ \text{ou bien } nx^{n-1} = 0 \iff x = 0 \end{cases}$$

$$f_n\left(e^{\frac{n-1}{n}}\right) = \left(e^{\frac{n-1}{n}}\right)^n \left(1-\ln\left(e^{\frac{n-1}{n}}\right)\right) = e^{n-1}\left(1-\frac{n-1}{n}\right) = \frac{e^{n-1}}{n}$$

• <u>Tableau de variation de f_n:</u>

x	0		$e^{\frac{n-1}{n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e^{n-1}}{n}$	$\searrow$	$-\infty$

3) a- Montrons que toutes les courbes (C_n) passent par trois points fixes pour cela il suffit de montrer que les courbes (C_n) et (C_{n+1}) ont trois points communs:

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) \iff x^{n+1}(1-\ln x) = x^n(1-\ln x) \iff$$
$$\iff x^n(1-\ln x)(x-1) = 0$$
$$\iff x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = e$$

b)- On étudie le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

Alors d'après la question 3) a- on peut établir le tableau suiva

	0		1		e		$+\infty$
	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
	PI	C_n/C_{n+1}	PI	C_{n+1}/C_n	PI	C_n/C_{n+1}	

4) Pour tout pour $n \geq 1$ on définit la suite $U_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} f_n(x)\,dx$

a - L'interpretation géométrique de l'integrale U_n est l'aire du domaine plan limité par (C_n), $(O\vec{x})$ et les droites d'equations $x = \frac{1}{e}$; $x = 1$

b - • D'aprés le tableau de variations f_n est positive sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e} ; 1\right]$, de plus $\frac{1}{e} \leq 1$ alors

$$U_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} f_n(x)\,dx \geq 0$$

• $U_{n+1} - U_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} f_{n+1}(x)\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right) dx$

or $\frac{1}{e} \leq 1$ d'aprés la question 3) b- on a $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ est négative sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e} ; 1\right]$ alors (U_n) est décroissante.

c) L'expression de U_n en fonction de n et la limite de (U_n):

• calculons $U_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} f_n(x)\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} x^n(1 - \ln x)\,dx$ en utilisant une intégration par parties :

$$\left\{\begin{array}{l} u(x) = 1 - \ln x \Rightarrow u'(x) = -\frac{1}{x} \\ v'(x) = x^n \Rightarrow v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{array}\right.$$

Alors $U_n = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \times (1 - \ln x)\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} -\frac{1}{x} \times \frac{1}{n+1} x^{n+1}\,dx$

$$U_n = \left(\frac{1}{n+1} \times 1 \times (1 - \ln 1) - \left(\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{e^{n+1}} \times (1 - \ln\frac{1}{e}\right) + \frac{1}{n+1} \int_{\frac{1}{e}}^{1} x^n \, dx.$$

$$U_n = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{2}{e^{n+1}}\right) + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{e^{n+1}}\right]$$

• La limite de (U_n)

comme $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{e^{n+1}} = 0 \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

Exercice 3 : (5 pts)

La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1) a - calcul de limites de f

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}(-1 + e^{2x})}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

Interpretation graphique : Asymptotes horizontales, l'une d'equation $y = -1$ au voisinage $-\infty$, l'autre d'equation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$

b - Démonstration que f est impaire et le tableau de variation f.

- $D_f = \mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in D_f ; -x \in D_f$

  $f(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} = -f(x)$

  alors f est une fonction impairé.

- Les variations de f

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

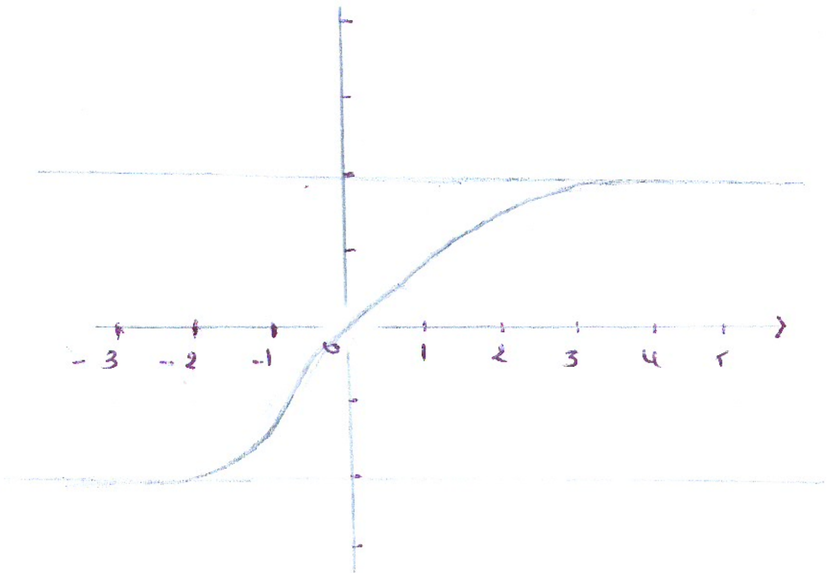
$$f'(x) = \frac{(e^{2x} + 2e^{-x} + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2e^{-x}e^{x} + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{4e^{-x}e^{x}}{(e^x + e^{-x})} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \geqslant 0$$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

c) La courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm



d - $A = \int_0^{\ln 3} f(x)\,dx = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \left[\ln(e^x - e^{-x})\right]_0^{\ln 3}$

$= \ln\left(3 + \frac{1}{3}\right) - \ln(1+1) = \ln\frac{5}{3}$

2) on définit la suite numérique $(U_n) = \int_0^{\ln 3} (f(t))\,dt$

a) calcul de u_1

$u_1 = \int_0^{\ln 3} f(t)\,dt = A = \ln\frac{5}{3}$

b) Montrons que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \ln 3$

On sait que f est croissante sur l'intervalle $[0, \ln 3]$

Alors $\forall t \in [0, \ln 3]$ $\quad f(0) \leq f(t) \leq f(\ln 3) \Rightarrow 0 \leq f(t)^n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$$\Rightarrow \int_1^{\ln 3} 0\,dt \leq \int_0^{\ln 3} (f(t))^n dt \leq \int_0^{\ln 3} \left(\frac{4}{5}\right)^n dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n [t]_0^{\ln 3}$$

Donc $0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \ln 3$

- Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ alors d'aprés le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

c) verifions que pour tout $x \geq 0$, $1 - f'(x) = (f(x))^2$:

$$1 - f'(x) = 1 - \frac{4e^{-x}e^{x}}{(e^{x}+e^{-x})^2} = \frac{(e^{x}+e^{-x})^2 - 4e^{-x}e^{x}}{(e^{x}+e^{-x})} =$$

$$\frac{e^{2x} + 2e^{-x}e^{x} + e^{-2x} - 4e^{-x}e^{x}}{(e^{x}+e^{-x})^2} =$$

$$\frac{e^{2x} - 2e^{-x}e^{x} + e^{-2x}}{(e^{x}+e^{-x})^2} =$$

$$\frac{(e^{x}-e^{-x})^2}{(e^{x}+e^{-x})^2} = (f(x))^2$$

Montrons que $\forall n \geq 0$, $U_{n+2} - U_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

$$U_{n+2} - U_n = \int_0^{\ln 3} (f(t))^{n+2}\,dt - \int_0^{\ln 3} (f(t))^n\,dt$$

$$= \int_0^{\ln 3} \left[(f(t))^{n+2} - (f(t))^n\right] dt$$

$$= \int_0^{\ln 3} \left(f^n(t)\left[(f(t))^2 - 1\right]\right) dt$$

$$= \int_0^{\ln 3} \left(f^n(t)\left[-f'(t)\right]\right) dt$$

$$= -\int_0^{\ln 3} \left(f'(t) \times f^n(t)\right) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{n+1} f^{n+1}(t)\right]_0^{\ln 3} = \frac{-1}{n+1}\left[(f(\ln 3))^{n+1} - (f(0))^{n+1}\right]$$

$$= \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

Alors $\forall n \geq 0$, $U_{n+2} - U_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

d) Pour tout entier naturel n strictement positive :

- Montrons que $U_{2n} = \ln 3 - \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$

On applique la relation démontrée dans la question 2) c) :

$\forall K \geq 2 \quad U_K - U_{K-2} = \frac{-1}{K-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{K-1}$ pour les termes consécutifs d'indices pairs de la suite (U_n), termes d'indices $K = 2p$ et $K - 2 = 2p - 2$, $p \in \mathbb{N}^*$

Donc $\forall p \geq 1 \quad U_{2p} - U_{2p-2} = \frac{-1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$

$$\begin{cases} p=1: & \cancel{U_2} - U_0 = \dfrac{-1}{2\times1-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\times1-1} \\ p=2: & U_4 - \cancel{U_2} = \dfrac{-1}{2\times2-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\times2-1} \\ p=3: & \cancel{U_6} - \cancel{U_4} = \dfrac{-1}{2\times3-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\times3-1} \\ \dots & \dots - \dots = \dots \\ \dots & \dots - \dots = \dots \\ \dots & \dots - \dots = \dots \\ p=2n: & U_{2n} - \cancel{U_{2n-2}} = \dfrac{-1}{2n-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2n-1} \end{cases}$$

En utilisant et simplifiant membres on obtient:

$$U_{2n} - U_0 \sum_{p=1}^{n} \frac{-1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1} \quad \text{or } U_0 = \int_0^{\ln 3} (f(t))^0 dt \, [t]_0^{\ln 3} = \ln 3$$

$$\text{Donc } U_{2n} = \ln 3 - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$$

- $\forall k \geq 2 \quad U_k - U_{k-2} = \dfrac{-1}{k-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{k-1}$ pour les termes successifs d'indices impairs de la suite (U_n), termes d'indice $k = 2p+1$ et $k-2 = 2p-1$, $p \in \mathbb{N}^*$

$$\text{donc } U_{2p+1} - U_{2p-1} = \frac{-1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p} \quad \forall p \geq 1$$

Alors:

$$\begin{cases} p=1 & U_3 - U_1 = \dfrac{-1}{2\times1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\times1} \\ p=2 & U_5 - U_3 = \dfrac{-1}{2\times2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\times2} \\ p=3 & U_7 - U_5 = \dfrac{-1}{2\times3}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\times3} \\ \dots & \dots - \dots = \dots \\ \dots & \dots - \dots = \dots \\ \vdots & \\ p=2n: & U_{2n+1} - U_{2n-1} = \dfrac{-1}{2n}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2n} \end{cases}$$

En additionnant et simplifiant membres à membres on obtient :

$$U_{2n+1} - U_1 = \sum_{p=1}^{n} -\frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p} \quad \text{or} \quad U_1 = \ln\frac{5}{3}$$

Don U_{2n+1} $\ln\frac{5}{3} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p}$

d) Pour tout entier naturel n strictement positif on pose

$$S_n = \frac{4}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^4 \dots + \frac{1}{2n}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n}$$

$$= \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2-1}$$

or d'après la question 2) d) on a

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1} = -U_{2n} + \ln 3 \text{ et}$$

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p} = -U_{2n+1} + \ln\frac{5}{3}$$

Alors $S_n = -U_{2n} + \ln 3 - U_{2+1} + \ln 5 - \cancel{\ln 3}$

Et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \ln 5$.