ECOOLE PRIVE ERRAJA

NOM : Marieme / Mouhamed Abderahmane.

N° 1118

CORRECTION :

EXERCICE :3

BAC

2013 SN

1ere fois

Bac 2013 SN

Exercice 3

1°) a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{-\infty} (3e^x - xe^x) = 0$

$\Rightarrow$ La droite (ox) : $y = 0$

est une AH de C_f en $-\infty$

* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (3 - x)e^x = (-\infty \times +\infty)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

* $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(3-x)e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} (\frac{3}{x} - 1)e^x$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow$ C_f admet en $+\infty$ une BP de direction (oy)

b) $f'(x) = -1e^x + (3-x)e^x$

$(-1 + 3 - x)e^x$

$(2 - x)e^x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

TV

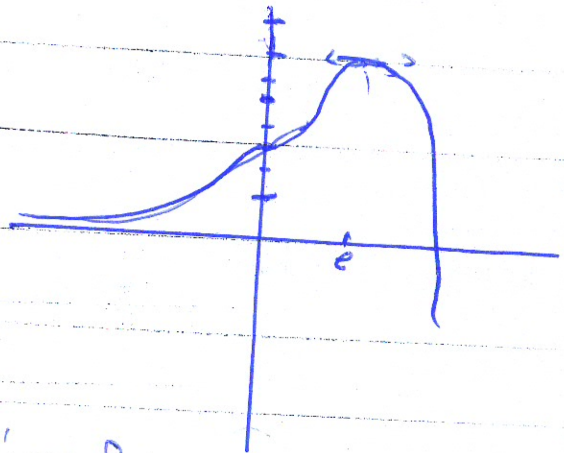
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	e^2	↘	$-\infty$

c)

$C_f \cap (ox)$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow (3-x)e^x = 0$

$\Rightarrow 3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$C_f \cap (oy) = \{(0, 3)\}$



d) $f'(x) - f(x) = (2-x)e^x - (3-x)e^x$

$= (2 - x - 3 + x)e^x = -e^x$

$\Rightarrow f$ est une solution de l'equation differentielle $y' - y = -e^x$

Calcul l'aire A

$\Leftrightarrow$ ~~f est solution~~

$A = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 (f'(x) + e^x)\,dx$

$= [f(x) + e^x]_0^3 = (e^3 - 4)\,u_A$

2) a) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{3^n}$

$= \dfrac{3^n \times 3 \times n!}{(n+1)n! \cdot 3^n} = \dfrac{3}{n+1}$

Or $n \geq 3 \Leftrightarrow n+1 \geq 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{3}{n+1} \leq \dfrac{3}{4}$

$0 \leq \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{3}{4}$

b) On a $0 \leq \dfrac{u_{k+1}}{u_k} \leq \dfrac{3}{4}$

Pour tout $k \geq 3$

$k = 3$ on a $0 \leq \dfrac{u_4}{u_3} \leq \dfrac{3}{4}$

$0 \leq \dfrac{u_5}{u_4} \leq \dfrac{3}{4}$

$0 \leq \dfrac{u_6}{u_5} \leq \dfrac{3}{4}$

$k = n-2$ $\quad 0 \leq \dfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \leq \dfrac{3}{4}$

$k = n-1$ $\quad 0 \leq \dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leq \dfrac{3}{4}$

En multipliant les membres entre eux et en simplifiant

on aura

$0 \leq \dfrac{u_n}{u_3} \leq \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} \times \dots \times \dfrac{3}{4}$
$(n-4+1)$ fois

$0 \leq \dfrac{u_n}{u_3} \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3}$

$0 \leq u_n \leq u_3 \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3}$

$0 \leq u_n \leq \dfrac{9}{2} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3}$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3} = 0$

Car $0 < \dfrac{3}{4} < 1$

alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ T G

3) $I_n = \dfrac{1}{n!} \int (3-x)^n e^x \, dx$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{3^k}{k!} = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{3}{1!} + \dfrac{3^2}{2!} \dots \dfrac{3^n}{n!}$

a) $I_1 = \dfrac{1}{1!} \int_0^3 (3-x) e^x \, dx$

$\int_0^3 f(x) \, dx = \boxed{A = e^3 - 4}$

b) on a $0 \leq x \leq 3$

$-3 \leq -x \leq 0$

$0 \leq 3 - x \leq 3$

$0 \leq (3-x)^n \leq 3^n$

(2) $\quad 0 \leq (3-x)^n e^x \leq 3^n e^x$

Suite

$$0 \leq \int_0^3 (3-x)^n e^x dx \leq \int_0^3 3^n e^x dx$$

$$0 \leq \frac{1}{n!}\int_0^3 (3-x)^n e^x dx \leq \frac{3^n}{n!}\int_0^3 e^x dx$$

$$0 \leq I_n \leq U_n [e^x]_0^3$$

$$0 \leq I_n \leq (e^3-1) U_n$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (e^3-1) U_n = (e^3-1) \times 0$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

c) $I_{n+1} = \left[\frac{1}{(n+1)!}\int_0^3 (3-x)^{n+1} e^x dx\right]$

On a d'après une IPP

$u(x) = (3-x)^{n+1} \Rightarrow u'(x) = -(n+1)(3-x)^n$

$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left[[e^x(3-x)^{n+1}]_0^3 - \int_0^3 -(n+1)(3-x)^n e^x dx \right]$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left[-3^{n+1} + (n+1)\int (3-x)^n e^x dx \right]$$

$$= -\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(n+1)}{(n+1)\, n!}\int_0^1 (3-x)^n e^x$$

$$I_{n+1} = -U_{n+1} + I_n$$

d) Démontrons par récurrence que $\forall n \geq 1$

$$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + I_n$$

Vérifions pour $n = 1$

$$\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + I_1 = 1 + 3 + e^3 - 4$$

Vraie pour $n = 1$

* on suppose que

$$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + I_n$$

on démontre que

$$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

on a

$$\underbrace{1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \dots + \frac{3^n}{n!}} + \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

$$(e^3 - I_n) + U_{n+1} + I_n - U_{n+1}$$

$$= e^3$$

Conclusion $\forall n \geq 1$

Conclusion

$\forall n \geq 1$ on a

$$e^3 = \underbrace{1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!}}_{S_n} + I_n$$

on a :

$$e^3 = S_n + I_n$$

$$S_n = e^3 - I_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} e^3 - I_n = e^3 - 0 = e^3$$

ECOOLE PRIVE ERRAJA

NOM : Mariem Med Abderrahmann

N°1118

CORRECTION:

EXERCICE :4

BAC

2015 SC

4ère fois (Page 1)

Bac 2015 SC

Exercice 1

$f(x) = \frac{x+1}{e^x} = (x+1)e^{-x}$

ⓐ TV de f

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(x+1)}{e^x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)e^{-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b)

$f'(x) = e^{-x} + (x+1)\cdot -e^{-x} = -xe^{-x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -xe^{-x} = 0$ or $\forall x \in \mathbb{R}$

$e^{-x} \neq 0$ d'où le signe

de $f'(x)$ est celui de $-x$

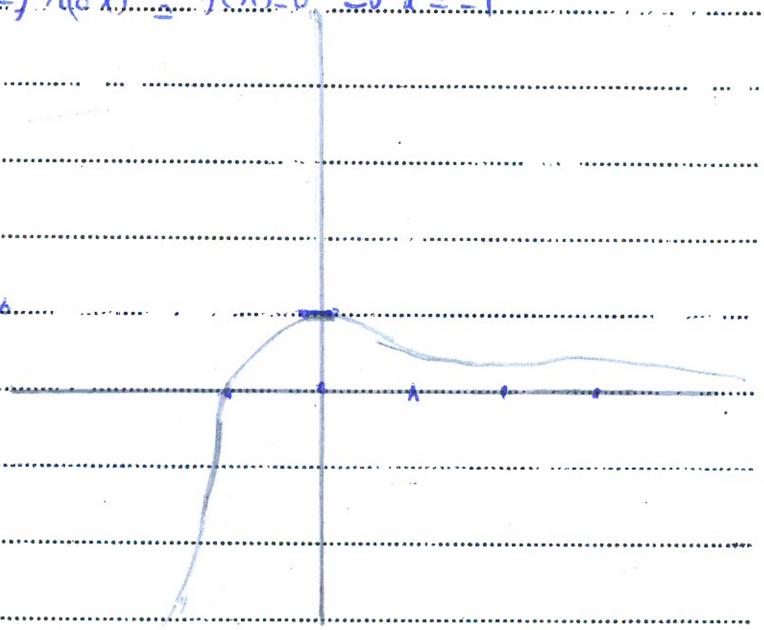
or $-x = 0 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	0

$f(0) = (0+1)e^{0} = 1$

$\Rightarrow f(0) = 1$

$C_f \cap (ox)$: $f(x) = 0 \Rightarrow x = -1$



2) $\forall n \geq 1$ $f_n(x) = \frac{(1+x)^n}{e^x} = (x+1)^n e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $F_n(x) = \int_{-1}^{x} f_n(t)\,dt$

Montrons que $\forall n \geq 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$

Faisons une IPP

$F_{n+1}(x) = \int_{-1}^{x} (1+x)^{n+1} e^{-t}\,dt$

on pose

$\begin{cases} u(x) = (1+x)^{n+1} \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = n+1(1+x)^n \\ v(x) = e^{-t} \end{cases}$

Page 8

$F_{n+1}(x) = \left[-(1+t)^{n+1} e^{-t}\right]_{-1}^{x} + (n+1)\int_{-1}^{x} (1+t)^n e^{-t}\,dt$

$F_{n+1}(x) = -f_{n+1}(x) + (n+1) F_n(x)$

③ Soit $I_n = F_n(0) = \int_{-1}^{0} f_n(t)\,dt$

a) Verifions que $\forall n \geq 1$

$I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$

de l'inegalité

$F_{n+1}(x) = (n+1) F_n(x) - f_{n+1}(x)$

on prend $x = 0$

$F_{n+1}(0) = (n+1) F_n(0) - f_{n+1}(0)$

$I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$

b) Montrons que la suite (I_n) est decroissante et positive

* on rappelle que

$\forall x \in [0,1]\ 0 \leq X^{n+1} \leq X^n \leq 1$

$-1 \leq t \leq 0$

$0 \leq 1+t \leq 1$

$0 \leq (1+t)^{n+1} \leq (1+t)^n$

$0 \leq (1+t)^{n+1} e^{-t} \leq (1+t)^n e^{-t}$

$0 \leq \int_{-1}^{0} (1+t)^{n+1} e^{-t}\,dt \leq \int_{-1}^{0} (1+t)^n e^{-t}\,dt$

$0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

donc (I_n) est decroissante est positive

c) Montrons que $\forall n \geq 1$

$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$

d'une part $I_{n+1} \leq I_n$ car $(I_n) \searrow$

$(n+1) I_n - 1 \leq I_n$

$n I_n + I_n - I_n \leq 1$

$n I_n \leq 1 \Rightarrow I_n \leq \frac{1}{n}$

d'autre part $I_{n+1} \geq 0$

$I_{n+1} \geq 0$

$0 \leq (n+1) I_n - 1$

$1 \leq (n+1) I_n \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq I_n$

donc $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$

on en deduit que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

④ $\forall n \geq 1$

$u_n = \frac{I_n}{n!}$

a) Montrons que $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{(n+1)!}$

on rappelle que $(n+1)! = (n+1)\,n!$

on a

$$I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$$

$$\Rightarrow \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1) I_n}{(n+1) n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = U_n - \frac{1}{(n+1)!}$$

Deduisons que

$$U_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

on a $U_1 = \frac{I_1}{1!}$ $I_1 = \int_{-1}^{0} (1+t) e^{-t} dt$

$u(t) = 1+t \longrightarrow u'(t) = 1$

$v'(t) = e^{-t} \longrightarrow v(t) = -e^{-t}$

$$U_1 = \left[-(1+t) e^{-t}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-t} dt$$

$$U_1 = \left[-(1+t) e^{-t}\right]_{-1}^{0} + \left[-e^{-t}\right]_{-1}^{0}$$

$$U_1 = -1 - 1 + e = e - 2$$

on a :

$U_{n+1} = U_n - \frac{1}{(n+1)!}$ Alors

$$\begin{cases} U_2 = U_1 - \frac{1}{2!} \\ U_3 = U_2 - \frac{1}{3!} \\ U_4 = U_3 - \frac{1}{4!} \\ \vdots \\ U_n = U_{n-1} - \frac{1}{n!} \end{cases}$$

par addition

$$U_n = U_1 - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

$$= e - 2 - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

$$e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

$$e - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

$$U_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Calculons $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

on sait $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{I_n}{n!} = 0$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - U_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$$

ECOOLE PRIVE ERRAJA

NOM : Mariem/ Med Abderrahmann

N° 1118

CORRECTION :

EXERCICE :1

BAC

2012 SN

Bac 2012 SN 4eme fois

Exercice (1)

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = e^x \ln(e^x+1)$

1) . $\lim_{-\infty} f(x) = 0$ car $\begin{cases} \lim_{-\infty} e^x = 0 \\ \lim_{-\infty} \ln(e^x+1) = 0 \end{cases}$

. $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{+\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{+\infty} \ln(e^x+1) = +\infty \end{cases}$

$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{e^x}{x} \ln(e^x+1)$

$= +\infty \times +\infty = +\infty$

Interpretation graphique

. $\lim_{-\infty} f(x) = 0$ la droite d'equation $y=0$ Asymptote horizontale a la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage $(-\infty)$

. $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ la courbe $\mathcal{C}$ admet une Branche Parabolyque de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$

2_ a)

f est derivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x . \ln(e^x+1) + \frac{e^x}{e^x+1} \times e^x$

d'ou

$$\boxed{f'(x) = e^x \ln(e^x+1) + \frac{2e^x}{e^x+1}}$$

on sait que $\forall x \in \mathbb{R}$

$e^x > 0$

d'ou $e^x+1 > 1$ alors

$\ln(e^x+1) > 0$ alors

$f'(x) > 0$

TV de

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	0 ↗ +

b) . f est Continue sur $\mathbb{R}$

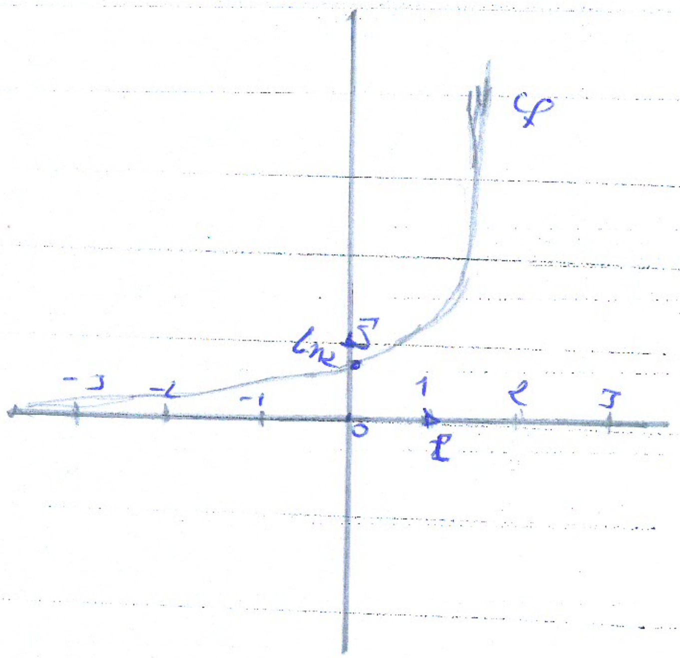
. f est strictement Croissante sur $\mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) =]0 +\infty[$

(1)

alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$ et

par suite $f(\mathbb{R}) =]0,+\infty[$



La courbe $\mathcal{C}$ coupe (oy) au point $(0, \ln 2)$

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0$ d'où $\mathcal{C} \cap (ox) = \emptyset$

2/ a) $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

<u>Méthode 1</u>

on utilise une identification pour déterminer les réels a; b et c

$f'(x) = f(x) + ae^{x} + b + \frac{ce^{x}}{1+e^{x}}$

$= f'(x) + ae^{x} + b + \frac{c}{1+e^{x}}$

$f'(x) = \frac{ae^{2x} + (a+b)e^{x} + b+c}{1+e^{x}}$

d'autre par

par identification

$\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \\ b+c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$

d'où

$f'(x) = f(x) + e^{x} - 1 + \frac{e^{x}}{1+e^{x}}$

$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (f(x)\, e^{-x} + 1 - \frac{e^{x}}{1+e^{x}})\,dx$

$= [\qquad\qquad]$

$f(1) = -e + 1 + \ln(1 + \frac{1}{e}) - f(0)$

$+ e^{0} + 1 + \ln 2$

Donc

$I = e\ln(e+1) - (e+1)\ln(\frac{1+e}{e}) - \ln 2$

$+ 1 - \ln 2$

Enfin

$I = (e+1)\ln(e+1) - 2\ln 2$

Methode B

En posant $t = e^{x} + 1$

$$\begin{cases} x = 0 \longrightarrow t = 2 \\ x = 1 \longrightarrow t = e+1 \\ dt = e^{x} dx \longrightarrow dx = \frac{dt}{t-1} \end{cases}$$

donc

$$I = \int_{2}^{e+1} (t-1) \ln(t) \, dt$$

On utilise une IPP

on pose

$$\begin{cases} u(x) = \ln t \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{t} \\ v(x) = t \end{cases}$$

comme $\int u v' = uv - \int u' v$

alors

$$\left[t \ln t \right]_{2}^{e+1} - \int_{2}^{e+1} dt$$

d'où

$$I = (e+1) \ln(1+e) - e - 1 - 2$$

En fin

$$I_{n} = (e+1) \ln(e+1) - 2\ln 2 - e + 1$$

ECOOLE PRIVE ERRAJA

NOM : Marième / mouhamed Abdarahmane

N° 1118

CORRECTION :

EXERCICE :2

BAC

2016 SN

Bac 2016 SN 4ème fois

$P(z) = z^3 - (4+8i)z + (-14+24i)z + 32+4i$

Calculons $P(2i)$

$P(2i) = (2i)^3 - (4+8i)(2i)^2 + (-14+24i)(2i) + 32+4i$

$= -8i - (4+8i)(-4) + (-14+24i)(2i) + 32+4i$

$= -8i + 16 + 32i - 28i - 48 + 32 + 4i$

$= -8i - 28i + 32i + 4i + 16 + 32 - 48$

$P(2i) = 0$

donc $P(2i) = 0$

determinons a et b

Tableau de Horner

	1	$-4-8i$	$-14+24i$	$32+4i$
$2i$		$2i$	$-8i+12$	$-32-4i$
	1	$-4-6i$	$-2+16i$	0

Donc

$P(z) = (z-2i)(z^2 - (4+6i)z - 2+16i)$

L'ensemble de des solution de l'équation $P(z) = 0$

$\Rightarrow (z-2i)(z^2 - (4+6i)z - 2+16i) = 0$

$\begin{cases} (z-2i) = 0 \Rightarrow z_1 = 2i \\ (z^2 - (4+6i)z - 2+16i) = 0 \end{cases}$

on a $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (4+6i)^2 - 4 \times 1 \times (-2+16i)$

$= -20 + 48i - 8 - 64i$

$\Delta = -12 - 16i$

on a $\delta = x + iy$

$|\Delta| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{12^2+16^2} = \sqrt{400} = 20$

$\begin{cases} x^2+y^2 = 20 & (1) \\ x^2-y^2 = -12 & (2) \\ 2xy = -16 & (3) \end{cases}$

on a d'après (1) + (2)

$2x^2 = 20 - 12 = 2x^2 = 8$

$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

on remplace dans 3

on obtient

$2 \times 2 \times y = -16$

$4y = -16$

$y = -4$

Donc $\delta = 2 - 4i$

$z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{4+6i+2-4i}{2} = 3+i$

$z_3 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{4+6i-2+4i}{2} = 1+5i$

d'ou

$S\ \{z_1 = 2i \ ; \ z_2 = 3+i \ ; \ z_3 = 1+5i\}$

L'affixe du pt z_G

on

a = bar

O	A	C
5	-7	4

donc

$Z_G = \frac{0 \times 5 - 7 \times (2i) + 4(1+5i)}{5-7+4} = \frac{6i+4}{2}$

$\boxed{z_G = 2+3i}$