Isselmou ould Mohamed

. Bac : 2014 (SN)

Ex 1 :

$p(z) = z^3 + (1-2i)z^2 + (1-2i)z - 2i$

1) calcule de $p(2i)$

$p(2i) = (2i)^3 + (1-2i)(2i)^2 + (1-2i)(2i) - 2i$

$\Rightarrow p(2i) = -\cancel{8i} + \cancel{4} + \cancel{8i} + \cancel{2i} + \cancel{4} - \cancel{2i}$

$\Rightarrow \boxed{p(2i) = 0}$

- determinons z_0 ; z_1 et z_2 de l'equation $p(z) = 0$

. Tableau de Honneur

	1	1-2i	1-2i	-2i
2i	$\cancel{\ }$	2i	2i	2i
	1	1	1	0

$\Rightarrow p(z) = (z-2i)(z^2+z+1)$

$p(z) = 0 \Rightarrow z - 1 = 0$ ou

$z^2 + z + 1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{z = 2i}$ ou $z^2 + z + 1 = 0$

$\Rightarrow z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = 3i^2$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{3}i$

$\Rightarrow z' = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$ et $z'' = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

or $Im z_0 \geq Im z_1 \geq Im z_2$

$\Rightarrow z_0 = 2i$; $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2) on a $z_A = z_0$; $z_B = z_1$ et $z_C = z_2$

on pose $z' = f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z + 1}$

(1)

2) suite (Ex 1)

soit M et M' d'affixe respective

z et z'

a) vérification : que l'équation

$2x+1=0$ est une équat°

de droite (BC)

. pour le point B $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$2x-\frac{1}{2}+1=0$ alors $B \in (2x+1=0)$

. pour le point C $\left(-\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

$2x-\frac{1}{2}+1=0$ alors $C(2x+1=0)$

alors la droite (BC) à pour

équat° cartésienne $\boxed{2x+1=0}$

b) si $M \in (BC) \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}, y\right)$

$\Rightarrow z=-\frac{1}{2}+iy$

$\Rightarrow f(z)=z'=\dfrac{1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

$\Rightarrow f(z)=z'=\dfrac{1}{\left(-\frac{1}{2}+iy+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

$\Rightarrow z'=f(z)=\dfrac{1}{\frac{3}{4}-y^2} \in \mathbb{R}$

alors si $M \in (BC)$ alors

$M' \in (xx')$ ou (xx') est

l'axe des abscisse.

3) a) si $|z|=1 \Rightarrow z\bar{z}=1$

$\Rightarrow z^2=z\cdot z$

$\Rightarrow f(z)=\dfrac{z\bar{z}}{z\bar{z}+z+z\bar{z}}=\dfrac{z\bar{z}}{z(1+z+\bar{z})}$

$\Rightarrow \boxed{f(z)=\dfrac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}}$

b) si $z = e^{i\theta}$ tq $\theta \in [\pi, \pi] \setminus \{\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$

$\Rightarrow \bar{z} = e^{-i\theta}$

$\Rightarrow f(z) = z' = \dfrac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}$

$\Rightarrow f(e^{i\theta}) = \dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta}$

$\Rightarrow f(e^{i\theta}) = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{1 + 2\cos\theta}$

$\Rightarrow \boxed{f(z)' = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}}$

4-a) si $M \in \mathcal{C}(0,1) \setminus \{A, C\}$

$\Rightarrow$ soit $z = e^{i\theta}$

$$\Rightarrow f(z) = \begin{cases} x' = \dfrac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ y' = \dfrac{-\sin\theta}{1+2\cos\theta} \end{cases}$$

$\Rightarrow x'^2 + y'^2 = \dfrac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{(1+2\cos\theta)^2}$

$\Rightarrow x'^2 + y'^2 = \dfrac{1}{(1+2\cos\theta)^2}$

- pour $(2x'-1)^2$

$\Rightarrow (2x'-1)^2 = \left(\dfrac{2\cos\theta}{1+2\cos\theta} - 1\right)^2$

$\Rightarrow (2x'-1)^2 = \left(\dfrac{\cancel{2\cos\theta} - \cancel{2\cos\theta} - 1}{1+2\cos\theta}\right)^2$

$\Rightarrow (2x'-1)^2 = \dfrac{1}{(1+2\cos\theta)^2}$

$\Rightarrow (x'^2 + y'^2) = (2x'-1)^2$

$\Rightarrow (x^2+y^2) = (2x-1)^2$

$\Rightarrow \boxed{\Gamma : (x^2+y)^2 = (2x-1)^2}$

suite (Exo:1)

4.b)

$\Gamma : x^2+y^2=(2x-1)^2$

$\Rightarrow x^2+y^2=4x^2-4x+1$

$\Rightarrow 3x^2-4x-y^2+1=0$

$\Rightarrow x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{3}=0$

$\Rightarrow x^2-\frac{4}{3}x+\frac{16}{36}-\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{3}-\frac{16}{36}=0$

$\Rightarrow (x-\frac{4}{6})^2-\frac{1}{3}y^2-\frac{1}{9}=0$

$\Rightarrow (x-\frac{4}{6})^2-\frac{1}{3}y^2=\frac{1}{9}$

$\Rightarrow \dfrac{(x-\frac{4}{6})^2}{(\frac{1}{3})^2}-\dfrac{y^2}{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}=1$

on pose $X=x-\frac{4}{6}$ et

$Y=y$

$\Rightarrow \Gamma : \dfrac{X^2}{(\frac{1}{3})^2}-\dfrac{Y^2}{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}=1$

c'est cette équation sous la forme $\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1$

tq $a=\frac{1}{3}$ et $b=\frac{\sqrt{3}}{3}$ qui caractérise une hyperbole de centre $\Omega(\frac{2}{3},0)$ et des sommets

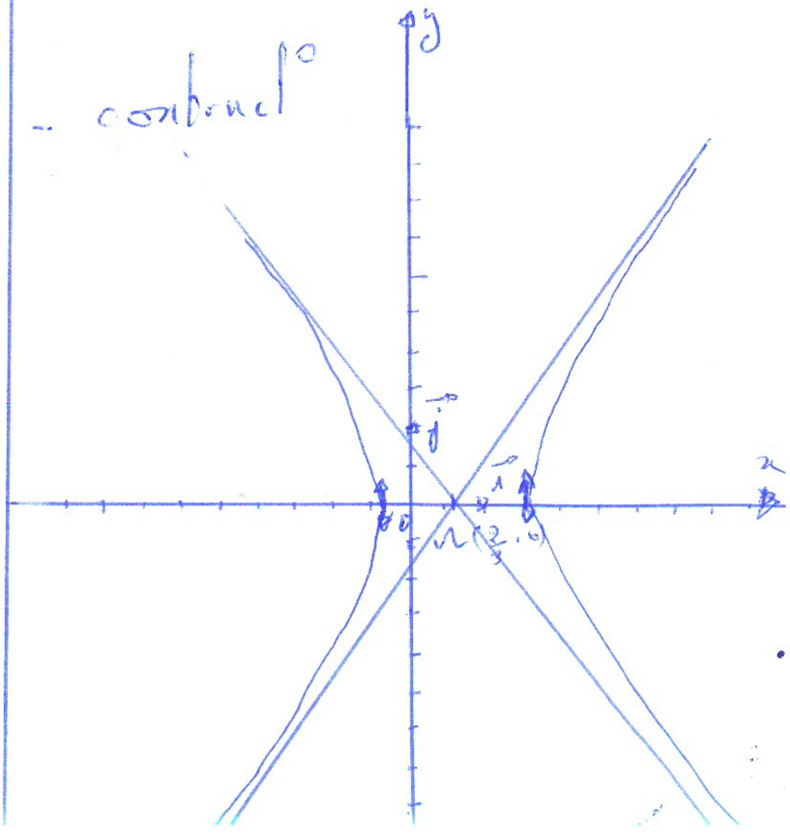
$A(\frac{1}{3}+\frac{2}{3},0)=(1,0)$

$B(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3},0)=(\frac{1}{3},0)$ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ est

d'excentricité.

$e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\dfrac{2/3}{1/3}=2.$

- construct°



Exo 2e

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

f est définie par $f(x) = xe^x$

1-a) Tableau de variation de f

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = -\infty \times 0$ FI

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} = 0$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• f est dérivable sur $\mathbb{R}$ ~~sa dérivée~~ car produit des fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto e^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$

Sa dérivée : $f'(x) = e^x + xe^x$

$\Rightarrow f'(x) = (1+x)e^x$

$\Rightarrow f'(x) = 0$ si $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1$

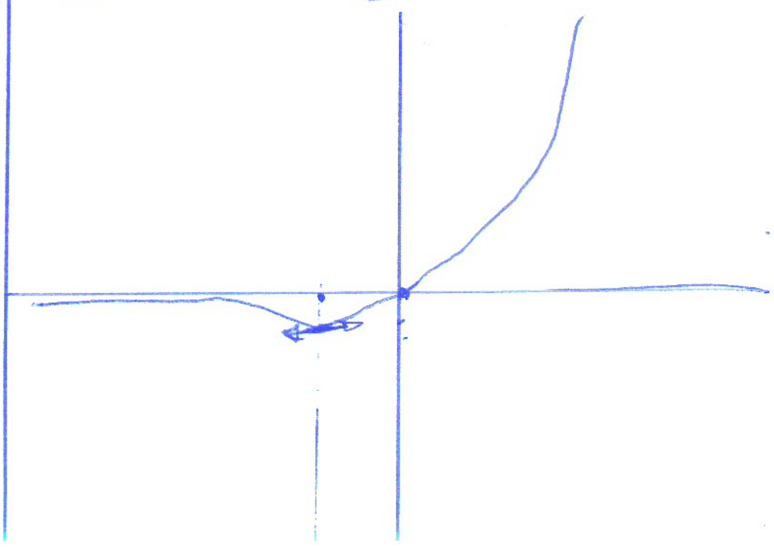
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

b) Traçons (C)

on a

$\begin{cases} f(x) \cap (Ox) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f(x) \cap (Oy) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ alors (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$



$\Rightarrow 1 \leq e^x \leq e \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow x^n \geq 0$

$\Rightarrow x^n \leq x^n e^x \leq x^n e$

$\Rightarrow \forall x \in [0,1]$

$$\int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq \int_0^1 x^n e\, dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq |I_n| \leq \left[\frac{e}{n+1}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}}$$

$\cdot \lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

c) $\forall n \geq 1$

$$I_{n+1} = (-1)^{n+1} \int_0^1 x^{n+1} e^x dx$$

$\Rightarrow$ on pose $\begin{cases} u(x) = (-1)^{n+1} \cdot x^{n+1} \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

alors $\begin{cases} u'(x) = (n+1)(-1)^{n+1} \cdot x^n \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \left[e^x \cdot (-1)^{n+1} \cdot x^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)(-1)^{n+1} \cdot x^n e^x dx$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = (-1)^{n+1} \cdot e + (n+1)(-1) \int_0^1 x^n e^x$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + I_n (n+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1) I_n}$$

d) $$J = \int_0^1 \frac{(x^3 + 4x^2 - 3x - 6) e^x dx}{x+1}$$

on a $(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3(-1) + 6 = 0$

$\Rightarrow$

	1	4	-3	-6
-1	↓	-1	-3	6
	1	3	-6	0

$\Rightarrow x^3 + 4x^2 - 3x - 6 = (x+1)(x^2 + 3x - 6)$

$$\Rightarrow J = \int_0^1 \frac{\cancel{(x+1)} (x^2 + 3x + 6)}{\cancel{(x+1)}} e^x dx$$

e) vérifions

or $f(x) = y \Rightarrow f'(x) = y'$

$\Rightarrow f''(x) = y''$

. calcul de $f''(x)$

. on a $f'(x) = y' = (1+x)e^x$

$\Rightarrow f''(x) = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$

$\Rightarrow f''(x) = (2+x)e^x$

$$\Rightarrow y'' - 2y' + y = (2+x)e^x - 2(1+x)e^x + xe^x$$
$$= 2e^x + xe^x - 2e^x - 2xe^x + xe^x$$
$$= 0$$

$\Rightarrow y'' - 2y' + y = f''(x) - 2f'(x) + y = 0$

$\Rightarrow \boxed{y'' - 2y' + y = 0}$

:) calcul de l'aire (A)

$$\Rightarrow A = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx$$

on pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow A = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$

$\Rightarrow A = [xe^x - e^x]_0^1$

$\Rightarrow A = e - e + 1 = 1$

$\Rightarrow \boxed{A = 1\ u.a}$

2) $\forall n \geq 1 \quad I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x\,dx$

a) calcul de I_1

$I_1 = -\int_0^1 xe^x\,dx = -A = -1$

$\Rightarrow \boxed{I_1 = -1}$

b) m.q $\forall n \geq 1 \quad \frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}$

$\forall x \in [0,1]$

$0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq e^x \leq e$

$$\Rightarrow J = \int_0^1 (x^2+3x-6)e^x\,dx$$

$$\Rightarrow J = \int_0^1 (-1)^2 x^2 e^x\,dx - (-1)^1 \int_0^1 3xe^x\,dx - 6\int_0^1 e^x\,dx$$

$$\Rightarrow J = I_2 - 3I_1 - 6[e^x]_0^1$$

or $I_2 = (-1)^2 \int_0^1 x^2 e^x\,dx = \int_0^1 x^2 e^x\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = [x^2 . e^x]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x\,dx$$

$$\Rightarrow I_2 = e + 2I_1$$

$$\Rightarrow J = (e + 2I_1) - 3I_1 - 6(e-1)$$

$$\Rightarrow J = -I_1 + e - 6e + 6$$

$$\Rightarrow J = 1 + 6 - 5e$$

$$\Rightarrow \boxed{J = -5e + 7}$$

$$\Rightarrow \boxed{J = 7 - 5e}$$

Exo3 :

1) f definie sur $[0,+\infty[$

par $\begin{cases} f(x) = x\ln(1+\frac{1}{x}) & x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

a) la continuité en 0^+

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x\ln(x+1) - x\ln x)$$
$$= 0\times 0 - 0\times 0 = 0 = f(0)$$

alors f est continue en zero à droite car $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$

b) la derivabilité à droite de zero.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \ln(1+\frac{1}{x})$$
$$= \ln(+\infty) = +\infty$$

alors f n'est pas derivable en 0^+

alors C_f admet une demi tangente veritical dirigé ver le haut.

c)-

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^+} f(t) \quad tq \quad x = \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1} \Rightarrow \boxed{y=1 \quad A.H}$$

2)- a) verification.

. ma f est derivable en $]0,+\infty[$

et sa derivée

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - \ln x - 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{x}{1+x} - 1$$

. on a f' est derivable sur $]0,+\infty[$

alors sa derivée

$$f''(x) = \left(\ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - \ln x - 1\right)'$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} + \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{\cancel{x} - 1 - \cancel{x}}{x(1+x)} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

b) $\forall x \in [0,1]$

d'apres T.V de $f(x)$

$0 \leq f(x) \leq 1$ et $x \in [0,1]$

$\Rightarrow x^{n-1} \times 0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$

$\Rightarrow 0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$

$\Rightarrow \boxed{0 \leq x^{n-1} \cdot f(x) \leq x^{n-1}}$

c)

or $0 \leq x^{n-1} \cdot f(x) \leq x^{n-1}$

$\Rightarrow 0 \leq f_n(x) \leq x^{n-1}$

$\forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 x^{n-1}\,dx$

$\Rightarrow 0 \leq A_n \leq \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1$

$\Rightarrow \boxed{0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = ?$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = 0$

d'apres gendarme.

4) on pose $I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 x^n \ln x\,dx = \lim\limits_{\alpha \to 0^+} I_n$

et $\delta_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$

a)

$I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 x^n \ln x\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^n \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1/x \\ v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$

$\Rightarrow I_n(\alpha) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln x\right]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \frac{x^n}{n+1}\,dx$

$\Rightarrow I_n(\alpha) = \left[-\frac{\ln \alpha}{n+1}(\alpha)^{n+1}\right] - \frac{1}{(n+1)^2} \cdot [x^{n+1}]_\alpha^1$

$\Rightarrow I_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\ln \alpha \cdot (\alpha)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$

$\Rightarrow I_n(\alpha) = \alpha^{n+1} \frac{(1 - \ln\alpha)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-(x+1)+x}{x(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x) = \frac{-1}{x(1+x)^2}}$$

on a.

x	0		$+\infty$
$f''(x)$	$\|\|$	$-$	
$f'(x)$	$\|\|$	$\searrow$	0

$$\lim_{x\to+\infty} f''(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x(1+x)^2} = 0$$

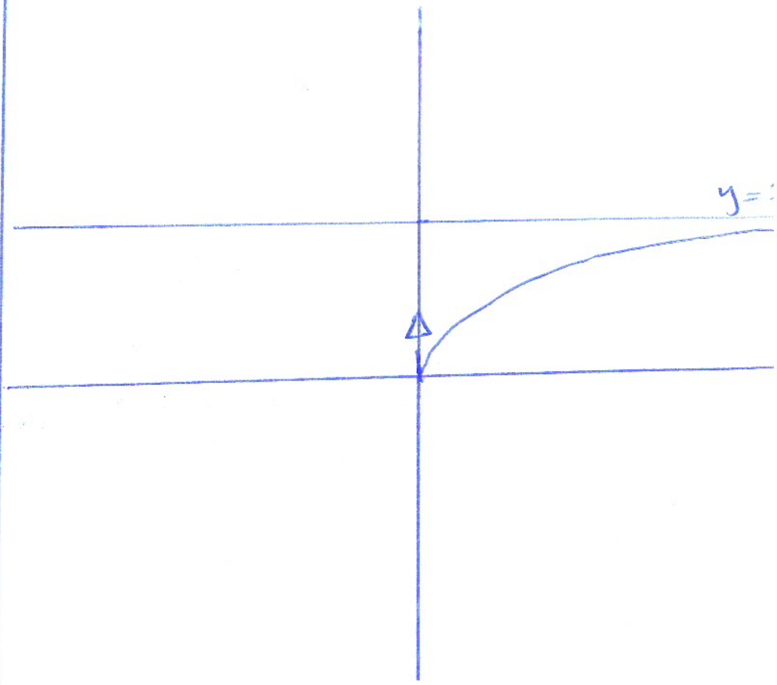
alors $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]0,+\infty[$

) le tableau de variation de f.

. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

c) la courbe de f.



$$\Rightarrow \begin{cases} f \cap (Ox) = f(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f \cap (Oy) \Rightarrow f(0) = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ A.V.

$y = 1$ A.H

3) $\forall n \geq 1$

on pose $\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

$$A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

a) or f_n est une fonction continue sur $[0, 1]$ et $0 < 1$

$\Rightarrow A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ définie bien une suite numérique b)

$$\lim_{\alpha \to 0^+} I_n(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0^+} \left(\frac{\alpha^{n+1} - \alpha^{n+1}\ln\alpha}{n+1}\right) - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{0}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{-1}{(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{\alpha \to 0} I(\alpha) = \frac{-1}{(n+1)^2}}$$

c)

$$J_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1)\,dx$$

on pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \ln(x+1) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow J_{n+1} = \Big[\big((x+1)\ln(x+1) - x\big).x^{n+1}\Big]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n\big((x+1)\ln(x+1) - x\big)dx$$

$$\Rightarrow J_{n+1} = 2\ln 2 - 1 - (n+1)\int_0^1 x^n(x+1)\ln(x+1) - x^n\,dx$$

$$\Rightarrow J_{n+1} = 2\ln 2 - 1 - (n+1)\left[J_{n+1} + J_n\right] - (n+1)\int_0^1 -x\,dx$$

$$\Rightarrow J_{n+1} = 2\ln 2 - 1 - (n+1)\left[J_{n+1} + J_n\right] + \frac{(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow (n+2)J_{n+1} = 2\ln 2 - 1 + \frac{(n+1)}{2} - (n+1)J_n$$

$$\Rightarrow J_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)} + \frac{(n+1)}{2(n+2)} - \frac{(n+1)}{n+2}J_n$$

$$\Rightarrow J_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} \; \frac{-2(n+2) + (n+2)(n+1)}{2(n+2)^2} - \frac{(n+1)}{n+2}J_n$$

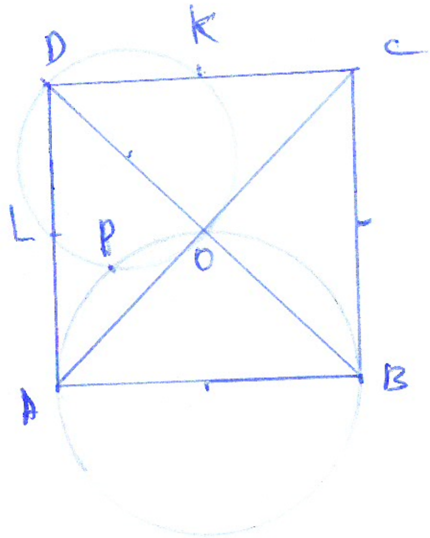
$$\Rightarrow \boxed{J_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{(n+1)}{(n+2)}J_n}$$

Exo4 :

partie A :

1) a) voir fig

a>0



2)

or $AK = BL \neq 0$

et $\vec{AK} \neq \vec{BL}$ alors

il existe une unique rotation

$$\begin{array}{c} r \\ A \longrightarrow B \\ K \longrightarrow L \end{array}$$

. le centre de r

med [AB] ∩ med [KL] = O

. l'angle de r

$(\vec{AK}, \vec{BL}) = (\vec{OA}, \vec{OB})\ [2\pi]$

$= \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

3-a)

or $B \neq L$ et $B \neq O$ alors

il existe une unique similitude de f_1 f_4

$$\begin{array}{c} f_1 \\ D \longrightarrow L \\ B \longrightarrow O \end{array}$$

le rapport (λ_1) de f_1

$\lambda_1 = \frac{OL}{DB} = \frac{DK}{DB} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

. l'angle (θ) de f_1

$\theta = (\vec{DB}, \vec{LO})\ [2\pi]$

$\theta = (\vec{DB}, \vec{DK})\ [2\pi]$

$\theta = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$\Rightarrow f_1 (\ \ , \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$

b) $f_1(P) = P \Rightarrow$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ P \longrightarrow P \\ D \longrightarrow L \\ B \longrightarrow O \end{array}$$

comme $f_1(P) = P$ et $f_1(B) = O$

on a donc

on a donc $(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PO}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

et or $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

$\Rightarrow (\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PO}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) [2\pi]$

$\Rightarrow (\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PO}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) [\pi]$

Donc le point P appartient au cercle circonscrit au triangle OAB c'est à dire que P appartient au cercle de diamètre [AB]

De même : comme $f_1(P) = P$

et $f_1(D) = L$ on a : $(\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PL}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

or $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OL}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

$\Rightarrow (\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PL}) = (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OL}) [\pi]$

Donc le point P appartient au cercle ~~circons~~ circonscrit au triangle ODL c'est à dire que P appartient au cercle de diamètre [OD].

on constate que le point O est commun aux cercle de diamètre [OD] et [AB] mais qu'il n'est pas le centre de f_1 (car $f_1^{-1}(O) = B \neq O$)

le point P est le le second point autre que O commun entre le deux cercle precedent.

3-b) - M.q. $P \in (BL)$ et $P \in (AK)$

et $(AK) \cap (BL) = P$

on a f_1 conserve les angle orienté.

$\Rightarrow (\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PL}) = (\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PO}) + (\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PL})$

$(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PL}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DL}) [\pi]$

$(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PL}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0 [\pi]$

Donc $P \in (BL)$

De même

$(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PK}) = (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PO}) + (\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PK}) [\pi]$

$(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PK}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DK}) [\pi]$

$(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PK}) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0 [\pi]$

Donc $P \in (AK)$

$\Rightarrow$ P est l'intersection de (BL) et (AK)

4) f_2

$B \longrightarrow D$

$O \longrightarrow L$

. l'angle (θ) de f_2.

$$\theta = (\vec{BO}, \vec{DL}) = (\vec{OD}, \vec{DL}) [2\pi]$$
$$\theta = (\vec{DO}, \vec{DL}) + \pi [2\pi]$$
$$\Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{4} + \pi [2\pi]$$
$$\Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

. Le rapport (k_2) de f_2

$$k_2 = \frac{DL}{BO} = \frac{DL}{DO} = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) on a $f_2 o f_1$ et $f_1 o f_2$ sont deux similitudes directes de même rapport et de même angle et transforment le point B en un même point L. (car $f_2 o f_1(B) = f_2 o f_1(B) = f_2(O) = L$ et

$f_1 o f_2(B) = f_1 o f_2(B) = f_1(D) = L$.)

Donc $f_2 o f_1 = f_1 o f_2$

Le centre de f_2 est donc celui de f_1 c'est à dire le point P.

5. a) soit $h = f_1 o f_2$

h est le composée entre deux similitude directe alors h est une similitude directe de centre P et d'angle $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1/2$.

alors h est une homothétie de centre P et rapport $-1/2$

$\Rightarrow h(P, -1/2)$ or $h = f_1 o f_2$

$\Rightarrow h(B) = f_1 o f_2(B) = L$.

$\Rightarrow \vec{PL} = -1/2 \cdot \vec{PB}$

$\Rightarrow$ ~~P = bar B, L~~

$L = bar \begin{array}{c|c} P & B \\ \hline 2 & -1 \end{array}$

$\Rightarrow P = bar \begin{array}{c|c} B & L \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

$\Rightarrow \beta = 1$ et $\gamma = 4$.

b) or $h = f_1 \circ f_2$

$\Rightarrow p = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c} B & L \\ \hline 1 & 4 \end{array}$

$\Rightarrow p = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c} B & D & A \\ \hline 1 & 2 & 2 \end{array}$

or $B = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c} A & D & C \\ \hline 1 & -1 & 1 \end{array}$

D'où $p = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c|c|c} A & D & C & D & A \\ \hline 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}$

$\Rightarrow p = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c} A & C & D \\ \hline 3 & 1 & 1 \end{array}$

$\Rightarrow p = \mathrm{bar}\begin{array}{c|c} A & K \\ \hline 3 & 2 \end{array}$

$\Rightarrow \alpha = 3$ et $\lambda = 2$.

partie B:

1) r est la composé ~~deux~~ de deux ~~demi~~ reflexion de plan perpendiculaire dont la droit d'intersection est (AD)

D'où: r est le demi tour d'axe (AD)

2) t est la composer de deux reflexion ~~d'axe~~ de plan parallèle. alors t est une translation de vecteur $2\vec{DA}$

3) $f = S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4 = rot$

alors f est la composée d'une translation et d'une rotation telle que le vecteur de la translation est un vecteur directeur de la rotation

D'où: f est la vissage d'axe (DA), d'angle π et de vecteur $2\vec{DA}$