Nom: lalle minf Lenaye

Bac 2011 SN:

Complexe:

$P(z) = z^3 - (1+2\cos\theta)z^2 + (1+2\cos\theta)z - 1$.

$\theta \in [0; 2\pi[$.

① a) calcul de $P(1)$:

$P(1) = 1^3 - (1+2\cos\theta)\times 1^2 + (1+2\cos\theta)\times 1 - 1$.

$= 1 - 1 - 2\cos\theta + 1 + 2\cos\theta - 1$.

$= 0$.

· pour résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équat° $P(z)=0$, on factorise $P(z)$ et pour cela on peut utiliser la division euclidienne, une identification, ou bien le tableau d'Horner : 1 est une racine du polynôme P.

	1	$-1-2\cos\theta$	$1+2\cos\theta$	-1
1	↓	1	$-2\cos\theta$	1
	1	$-2\cos\theta$	1	0

Alors pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = (z-1)(z^2 - 2\cos\theta z + 1)$

$P(z) = 0 \iff (z-1)(z^2 - 2\cos\theta z + 1) = 0$

Soit $z - 1 = 0 \Rightarrow z_0 = 1 \in \mathbb{R}$

ou $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$.

Résolvons l'équation :

$z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$.

$\Delta' = (-\cos\theta)^2 - 1\times 1$.

$= \cos^2\theta - 1$

$= -(1 - \cos^2\theta)$.

$= (i\sin\theta)^2$.

Donc :

$z' = \dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{1} = \cos\theta + i\sin\theta$

$z'' = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{1} = \cos\theta - i\sin\theta$

Si $\sin\theta \geq 0$, $Im(z_1) \geq 0$

$\Rightarrow z_1 = z' = \cos\theta + i\sin\theta$

Si $\theta \in [0, 2\pi[$.

Alors : $z_2 = \cos\theta - i\sin\theta$.

Donc l'ensemble de solution de l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$, est :

$S = \{1; \cos\theta + i\sin\theta; \cos\theta - i\sin\theta\}$

② Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les nombres z_0, z_1 et z_2 sont les affixes respectives de M_0, M_1 et M_2. Déterminer les lieux géométriques de M_1, M_2 lorsque θ décrit $[0, 2\pi[$.

$M_1(x_{M_1}; y_{M_1}) \Rightarrow \begin{cases} x_{M_1} = \cos\theta \\ y_{M_1} = \sin\theta \end{cases}$

$\iff x_M^2 + y_M^2 = 1$

$\Leftrightarrow$ M_1 décrit le cercle de centre O et de rayon 1.

Autrement :

$OM_1 = |z_1 - 0| = |e^{i\theta}| = 1$, $\theta \in]0, 2\pi[$.

Donc M_1 décrit le cercle de centre O et de rayon 1.

De même pour M_2 : M_2 décrit le cercle de centre O et de rayon 1.

③ $G = \text{bar}$

M_0	M_1	M_2
1	1	-3

$1+1-3 \neq 0$

a) le lieu géométrique du point G :

calculons z_G l'affixe du point G :

$$z_G = \frac{1 \times z_0 + 1 \times z_1 - 3 z_2}{1+1-3}$$

$$z_G = \frac{1 + \cos\theta + i\sin\theta - 3(\cos\theta - i\sin\theta)}{1+1-3}$$

$$z_G = -1 + 2\cos\theta - 4i\sin\theta$$

$$\begin{cases} x = -1 + 2\cos\theta \\ y = -4\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{x+1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{4}y \end{cases}$$

$\theta \in [0, 2\pi[$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{y}{4}\right)^2 = 1.$$

Alors le lieu géométrique Γ de G est l'ellipse d'equation $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

b) Soient (x, y) les coordonnées de G dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et considérons le point $\Omega(-1; 0)$ alors dans le repère $(\Omega; \vec{u}; \vec{v})$ les coordonnée $(X; Y)$ de G vérifient : $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{16} = 1$ car

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y \end{cases}.$$

Alors le lieu géométrique Γ de G est l'ellipse dont l'equation réduite dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$

$$\frac{X^2}{2^2} + \frac{Y^2}{4^2} = 1.$$

Comme $b = 4 > 2 = a$.

alors les éléments caractéristiques (dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ sont :

- le centre $\Omega(-1; 0)$
- les sommets :

- Dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ les sommets sont $A(2, 0)$ $A'(-2, 0)$, $B(0; 4)$ et $B'(0, -4)$

or $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y \end{cases}$

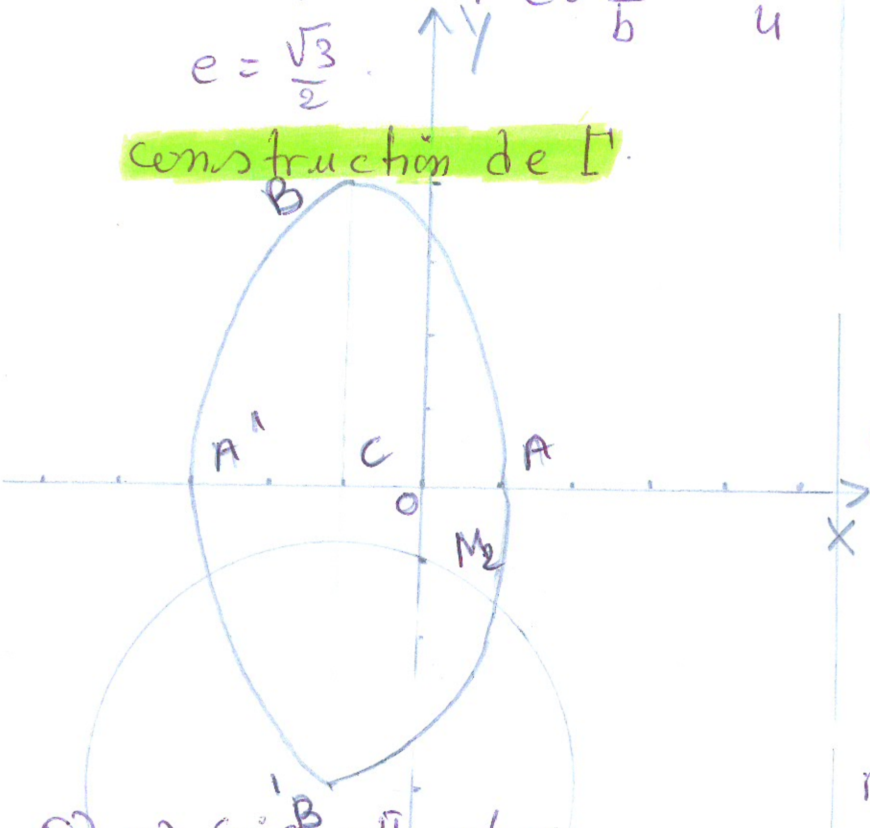
- Donc dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les sommets soit $A(1,0)$, $A'(-3;0)$

$B(-1;4)$ et $B'(-1;-4)$.

- $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$.
- l'excentricité : $e = \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{4}$

$e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

construction de Γ



4) a) Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ alors

- $z_0 = 1 \iff M_0(1,0)$.
- $z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \iff M_1(0,1)$.
- $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} \iff M_2(0,-1)$.

Alors $z_G = -1 + 2\cos\frac{\pi}{2} - 4i\sin\frac{\pi}{2}$

$z_G = -1 - 4i \Rightarrow G(-1;-4)$.

En particulier, G est un sommet de Γ : $G = B'$.

b) Γ' est l'ensemble de points M du plan tel que

$MM_0^2 + MM_1 - 3MM_2^2 = 6$.

c'est la ligne de niveau 6 de la fonction scalaire de Leibniz.

$\varphi(M) = MM_0^2 + MM_1 - 3MM_2^2$

associée au système $\{(M_0, 1), (M_1, 1), (M_2, -3)\}$

dont le barycentre est G

Donc, par réduction d'écriture : $M \in \Gamma'$

$\iff -MG^2 + \varphi(G) = 6$.

$\varphi(G) = GM_0^2 + GM_1^2 - 3GM_2^2$

$GM_0^2 = |z_0 - z_G|^2 = (-1-1)^2 + (-4-0)^2 = 20$.

$GM_1^2 = |z_1 - z_G|^2 = (0+1)^2 + (1+4)^2 = 26$.

$GM_2^2 = |z_0 - z_G|^2 = (0+1)^2 + (-1+4)^2 = 10$. Alors $\varphi(G) = 1$

Donc $M \in \Gamma' \iff MG^2 = 10$ d'où Γ' est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{10} = GM_2$.

Γ' est le cercle de centre G passant par M_2 car $GM_2^2 = 10$.

autre methode :

$\varphi(M_2) = M_2M_0^2 + M_2M_1^2 - 3M_2M_2^2$

$= ((1-0)^2 + (0+1)^2) + ((0-0)^2 + (1+1)^2) + 0 = 6$.

Alors $M_2 \in \Gamma'$. Donc $\Gamma' \neq \{\ \}$ et $\Gamma' \neq \{G\}$. par suite Γ' est le cercle de centre G passant par M_2.