BAC 2014 SN

Ex 1 complexe : (suite)

or $\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y \end{cases}$

. Donc dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$

les sommets sont :

$A(1;0)$; $A'(-3;0)$; $B(-1;4)$ et $B'(-1;-4)$

• $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$

• L'excentricité : $e = \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

construction de Γ

1) si $\theta = \frac{\pi}{2}$ alors

• $z_0 = 1 \iff M_0(1;0)$

• $z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \iff M_1(0;1)$

• $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} \iff M_2(0;-1)$

lors $z_G = -1 + 2\cos\frac{\pi}{2} - 4i\sin\frac{\pi}{2} =$

$= -1 - 4i \implies G(-1;-4)$

En particulier, G est un sommet de Γ : $G = B'$

) Γ' est l'ensemble de points M du plan tels que $MM_0^2 + MM_1^2 - 3MM_2^2 = 6$

c'est la ligne de niveau 6 de la fonction scalaire de Leibniz

$\varphi(M) = MM_0^2 + MM_1 - 3MM_2^2$ associée au système $\{(M_0;1);(M_1;1);(M_2;-3)\}$

dont le barycentre est G. Donc, par réduction d'écriture : $M \in \Gamma' \iff$

$-MG^2 + \varphi(G) = 6$

$\varphi(G) = GM_0^2 + GM_1^2 - 3GM_2^2$

$GM_0^2 = |z_0 - z_G|^2 = (-1-1)^2 + (-4-0)^2 = 2$

$GM_1^2 = |z_1 - z_G|^2 = (0+1)^2 + (1+4)^2 = 2$

$GM_2^2 = |z_2 - z_G|^2 = (0+1)^2 + (-1+4)^2 = 1$

Alors $\varphi(G) = 16$

Donc $M \in \Gamma' \iff MG^2 = 10$ d'où Γ' est le cercle de centre G de rayon $\sqrt{10} = GM_2$

Γ' est le cercle de centre G passant par M_2 car $GM_2^2 = 10$

Autre Méthode

$\varphi(M_2) = M_2M_0^2 + M_2M_1^2 - 3M_2M_2^2$

$= (1-0)^2 + (0+1)^2 + (0-0)^2 + (1+1)^2 = 6$

Alors : $M_2 \in \Gamma'$.

Donc $\Gamma' \neq \{\}$ et $\Gamma' \neq \{G\}$.

par suite Γ' est le cercle de centre G passant par M_2.

BAC 2014 SN

Ex 1 : Correction : BAC : 2011

pour tout nombre complexe z

on a : $p(z) = z^3 (1+2\cos\theta)z^2 + (1+2\cos\theta)z - 1$

où $\theta \Rightarrow \in [0; \frac{2\pi}{3}[$

1.a) Calcule de $p(1)$

$p(1) = 1^3 - (1+2\cos\theta) \times 1^2 + (1+2\cos\theta) \times 1 - 1$

$= 1 - 1 - 2\cos\theta + 1 + 2\cos\theta - 1 = 0$

$= 0$

pour resoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$, on factorise $p(z)$ et pour cela on peut utiliser : la division euclidiene ; une identification, ou bien Tableau d'Horner :

1	$-1-2\cos\theta$	$1+2\cos\theta$	-1
	1	$-2\cos\theta$	1
1	-2	1	0

alors pour tout nombre complexe on a : $p(z) = (z-1)(z^2 - 2\cos\theta z + 1)$

$p(z) = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 - 2\cos\theta z + 1) = 0$

soit $z - 1 = 0 \Rightarrow z_0 = 1 \in \mathbb{R}$ où $z^2 - (\cos\theta) + 1 = 0$

Résoudre l'équation : $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$

$\Delta' = (-\cos)^2 - 1 \times 1 = \cos^2\theta - 1 : -(1-\cos^2\theta) = (i\sin\theta)^2$

Donc : $z' = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1} = \cos\theta + i\sin\theta$

$z'' = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1} = \cos\theta;$

si $\sin\theta \geq 0$. $Im(z_1) \geq 0 \Rightarrow z_1 = z'$ $= \cos\theta + i\sin\theta$ si $\theta \in [0; 2\pi[$

Alors : $z_2 = \cos\theta - i\sin\theta$

Donc : l'ensemble de solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$ est S :

$S = \left\{1 ; \cos\theta + i\sin\theta ; \cos\theta - i\sin\theta\right\}$

2/ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ les nombres z_0, z_1 et z_2 sont les affixes respectivement de $M_0 ; M_1 ;$ et Determines le lieu geometrique de $M_1 ; M_2$

Lorsque : θ decrit $[0; 2\pi[$

$M_1(x_{M_1} ; x_{M_2}) \Rightarrow \begin{cases} x_{M_1} = \cos\theta \\ y_{M_1} = \sin\theta \Leftrightarrow x_{M_1}^2 + y_{M_1}^2 = 1 \\ \theta \in [0; 2\pi[\end{cases}$