Bac 2012 S.N
Meni Dahane
7l

EXO 3 :

$E_\theta = z^2 - 6\cos\theta z + 4 + 5\cos^2\theta = 0$

1) a) Résolvons l'équation E_θ :

$\Delta' = 9\cos^2\theta - 4 - 5\cos^2\theta$
$= 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta$
$= (2i\sin\theta)^2$ donc

$\delta = 2i\sin\theta$

Les solutions sont

$z_1 = 3\cos\theta + 2i\sin\theta$

$z_2 = 3\cos\theta - 2i\sin\theta$

$\forall\, \theta \in [0;\pi[$ $\sin\theta \geq 0$ donc

$\forall \theta \in [0;\pi[$ $Im(z_1) \geq 0$

b) E_θ = admet des solutions doubles

$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0$

$\theta \in [0;2\pi[$

$\Leftrightarrow \theta = 0$ ou $\theta = \pi$

dans ce cas $z_{A_1} = 3$

$z_{A_2} = -3$

, admet des solutions imaginaires pures $\Leftrightarrow \cos\theta = 0$ et $\theta \in [0;2\pi[$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$

dans le cas $z_{B_1} = 2i$; $z_{B_2} = -2i$

2) $z_{M_1} = 3\cos\theta + 2i\sin\theta$; $z_{M_2} = 3\cos\theta - 2i\sin\theta$

$\begin{cases} x_{M_1} = 3\cos\theta \\ y_{M_1} = 2\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x_{M_1}}{3}\right)^2 = \cos^2\theta \\ \left(\frac{y_{M_1}}{2}\right)^2 = \sin^2\theta \end{cases}$

donc :

$\frac{x_{M_1}^2}{3^2} + \frac{y_{M_1}^2}{2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

de même $\frac{x_{M_2}^2}{3^2} + \frac{y_{M_2}^2}{2^2} = 1$

donc M_1 et M_2 appartiennent le même elipse d'équation

$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

donc Γ est une élipse de centre O et d'équation cartesienne

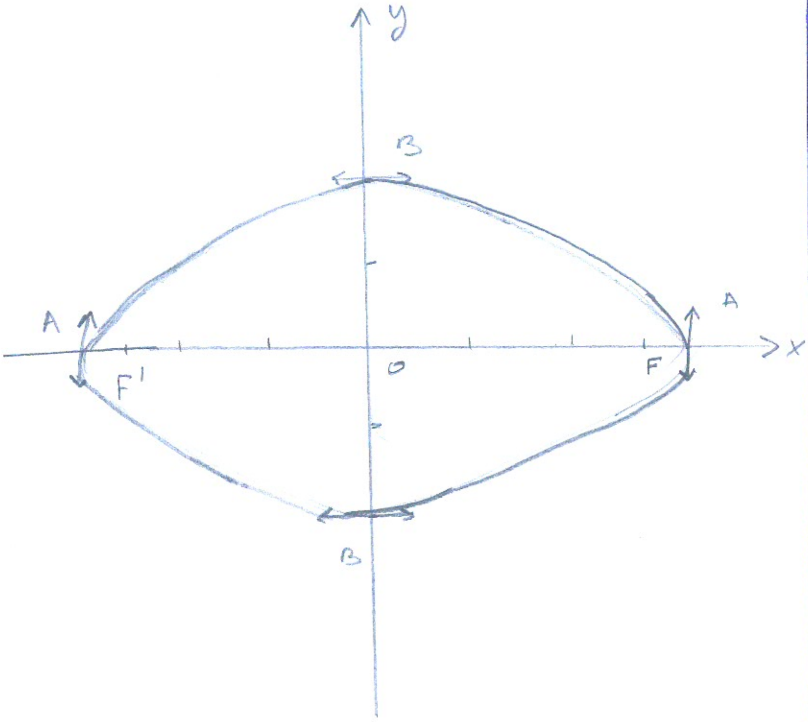
$\boxed{\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1}$

b) Γ est une ellipse de centre O et des sommets $A(3;0)$, $A'(-3;0)$ $B(0;2)$, $B'(0;-2)$ et de foyers $F(\sqrt{5};0)$, $F'(-\sqrt{5};0)$ d'axe focal $(O;\vec{i})$ de directrices Δ

$\Delta : x = \frac{9}{\sqrt{5}}$; $\Delta' : x = \frac{-9}{\sqrt{5}}$

Suite EXO 3:

et d'excentricité : $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$



3) $f(M) = M' \Leftrightarrow M' = bar\left[\begin{array}{c|c|c} A_1 & B_1 & C_1 \\ -4 & 2 & 3 \end{array}\right]$

$$z' = \frac{-4z_{A_1} + 2z_{B_1} + 3z}{-4+2+3}$$

$$= \frac{-4 \times 3 + 2 \times 2i + 3z}{1}$$

donc : $z' = 3z - 12 + 4i$

a ; $3 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $z' = az + b$

donc f est une homothétie de rapport $k = 3$ et de centre Ω d'affixe

$$z_\Omega = \frac{-12+4i}{1-3} = 6-2i$$

b) $\Gamma' = f(\Gamma)$

$M(x';y') \in \Gamma'$; $M(x;y) \in \Gamma$

tel que $f(M) = M'$

$\Leftrightarrow x' + iy' = 3(x+iy) - 12 + 4i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3x - 12 \\ y' = 3y + 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x'+12}{3} \\ y = \frac{y'-4}{3} \end{cases}$

d'après 2-a

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x'+12)^2}{9^2} + \frac{(y'-4)^2}{6^2} = 1$$

donc l'équation cartésienne de Γ est

$$\boxed{\frac{x'+12}{9^2} + \frac{(y'-4)}{6^2} = 1}$$