Bac 2011 S.N

Meni Dahane

H_1

EXO 1 :

1) a) $P(z) = z^3 - (1+2\cos\theta)z^2 + (1+2\cos\theta)z - 1$

$P(1) = 1^3 - (1+2\cos\theta)\times 1^2 + (1+2\cos\theta)\times 1 - 1$

$= 1 - 1 - 2\cos\theta + 1 + 2\cos\theta - 1$

$= 0$

$P(1) = 0$

$P(z=0)$

T.H

	1	$-1-2\cos\theta$	$1+2\cos\theta$	-1
1	↓	1	$-2\cos\theta$	1
	1	$-2\cos\theta$	1	0

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 - 2\cos\theta\, z + 1) = 0$

soit $z - 1 = 0$

$z_0 = 1 \in \mathbb{R}$

ou $z^2 - 2\cos\theta\, z + 1 = 0$

$\Delta' = (-\cos)^2 - 1\times 1$

$= \cos^2\theta - 1$

$= -(1 - \cos^2\theta)$

$= (i\sin\theta)^2$

$z' = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1} = \cos\theta + i\sin\theta$

$z'' \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1} = \cos\theta - i\sin\theta$

si $\sin\theta \geq 0$

$Im(z_1) \geq 0$; $z_1 = z'$

$= \cos\theta + i\sin\theta$

$\forall \theta \in [0; 2\pi[$

Alors : $z_2 = \cos\theta - i\sin\theta$.

$S\{1; \cos\theta + i\sin\theta ; -i\sin\theta$

2)

$M_1 (x_{M_1} ; x_{M_2}) =$
$\begin{cases} x_M = \cos\theta \\ y_{M_1} = \sin\theta \Leftrightarrow x_M^2 + y_{M_1}^2 = 1 \\ \theta \in [0; 2\pi[\end{cases}$

$\Leftrightarrow M_1$ Décrit le cercle O et de rayon 1

Autrement :

$OM_1 = |z_1 - 0| = |e^{i\theta}| = 1 ; \theta \in]0; 2\pi[$

Donc M_1 décrit le cercle de Centre O et de rayon 1

De même pour M_2 ; M_2 décrit le cercle de Centre O et de rayon 1

Suite Exo1 :

G = bar

M_0	M_1	M_2
1	1	-3

$1+1-3 \neq 0$

a) Le lieu géometrique du point G :

Calculons Z_G l'affixe du point G :

$$Z_G = \frac{1\times Z_0 + 1\times Z_1 - 3Z_2}{1+1-3}$$

$$= \frac{1+\cos\theta + i\sin\theta - 3(\cos\theta - i\sin\theta)}{1+1-3}$$

$$\boxed{Z_G = -1 + 2\cos\theta - 4i\sin\theta}$$

$\begin{cases} x = -1 + 2\cos\theta \\ y = -4\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = \frac{x+1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{4}y \end{cases}$

$\iff \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{y}{4}\right)^2 = 1$

Alors le lieu géometrique Γ de G est l'ellipse d'equation $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ dans le repère $(0;\vec{u};\vec{v})$

b) soit $(x;y)$ les coordonnées de G dans le repère $(0;\vec{u};\vec{v})$ et considérons le point

$\Omega(-1;0)$; alors dans le repère $(\Omega;\vec{u};\vec{v})$ les coordonnée $(X;Y)$ de G vérifient : $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{16} = 1$

car $\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y \end{cases}$

le lieu géometrique Γ de G est l'ellipse dont l'equation réduite dans le repère $(\Omega;\vec{u};\vec{v})$

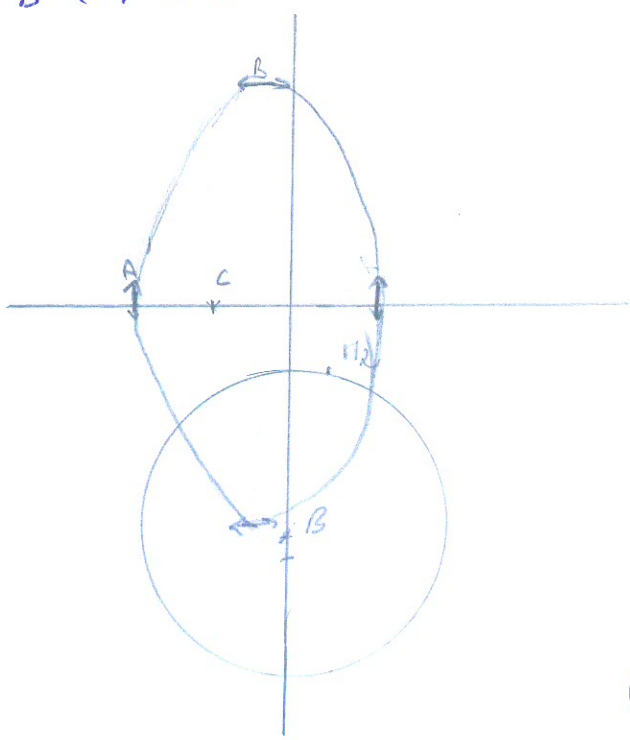
$$\frac{X^2}{2^2} + \frac{Y^2}{4^2} = 1$$

Comme $b = 4 > 2 = a$

alors les elements caracteristiques (dans le repère $(0;\vec{u},\vec{v})$ sont

- le centre $\Omega(-1;0)$
- Les sommets

- Dans le repère $(\Omega;\vec{u};\vec{v})$ les sommets sont $A(2;0)$ $A'(-2;0)$ $B(0;4)$ et $B'(0;-4)$



Suite EXO1

où $\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y \end{cases}$

Donc dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les sommets sont $A(1;0)$ $A'(-3;0)$ $B(-1;4)$ et $B'(-1;-4)$

- $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$
- $e = \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4) a) si $\theta = \frac{\pi}{2}$ alors

- $z_0 = 1 \Leftrightarrow M_0(1;0)$
- $z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$
  $\Leftrightarrow M_1(0;1)$
- $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}$
  $\Leftrightarrow M_2(0;-1)$

alors $z_G = -1 + 2\cos\frac{\pi}{2} - 4i\sin\frac{\pi}{2}$
$= -1 - 4i$

$G(-1;-4)$

G est un sommet de Γ : $G = B'$

b) Γ' est l'ensemble de points M du plan tels que :

$MM_0^2 + MM_1 - 3MM_2^2 = 6$

$\varphi(M) = MM_0^2 + MM_1 - 3MM_2^2$

$\{(M_0;1);(M_1;1);(M_2;-3)\}$

$M \in \Gamma' \Leftrightarrow -MG^2 + \varphi(G) = 6$

$\varphi(G) = GM_0^2 + GM_1^2 - 3GM_2^2$

$GM_0^2 = |z_0 - z_G|^2 = (-1-1)^2 + (-4-0)^2 = 20$

$GM_1^2 = |z_1 - z_G|^2 = (0+1)^2 + (1+4)^2 = 26$

$GM_2^2 = |z_0 - z_G|^2 = (0+1)^2 + (-1+4)^2 = 10$

alors $\varphi(G) = 16$

Donc $M \in \Gamma' \Leftrightarrow MG^2 = 10$ d'où

Γ' est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{10} = GM_2$

Γ' est le cercle de centre G passant par M_2 car $GM_2^2 = 10$