oumouselemeta / seyid

corrigée Bac 2013 : S.N :

Exercice 2 :

1°) $p(z)=z^3(9-i)z^2+(28-5i)z-32+4i$

a) $p(4)=4^3-(9-i)\times 16+4(28-5i)-32+4i$

$=64-144+16i+112-20i-32+4i$

$=0$

$p(z)=(z-4)(z^2+az+b)$

En utilisant le tableau d'HORNER :

	1	$-9+i$	$28-5i$	$-3+4i$
4	////	4	$-20+4i$	$32-4i$
	1	$-5+i$	$8-i$	0

$P(z)=(z-4)(z^2+(-5+i)z+8-i)$

b) $p(z)=0 \Leftrightarrow z-4=0 \Leftrightarrow z=4$

ou $z^2+(-5+i)z+8-i=0$

$\Delta=(-5+i)^2-4\times 1(8-i)$

$=25-10i-1-32+4i$

$=-8-6i=(1-3i)^2$

$z_1=\dfrac{5-i+1-3i}{2}=3-2i$

$z_2=\dfrac{6-i-1+3i}{2}=2+i$

$S=\{4,\ 3-2i;\ 2+i\}$

2°) $A(4)$; $B(2+i)$, $C(3-2i)$

a) $S: M(z)\longrightarrow M'(z')/$

$z'=az+b / a, b\in \mathbb{C}$

$S: C\longrightarrow C \Leftrightarrow z_C=az_C+b \ (1)$

$S: A\longrightarrow B \Leftrightarrow z_B=az_A+b \ (2)$

$(1)-(2)$ donne $z_C-z_B=a(z_C-z_A)$

$\Rightarrow a=\dfrac{z_C-z_B}{z_C-z_A}=\dfrac{3-2i-2-i}{3-2i-4}$

$=\dfrac{1-3i}{-1-2i}=\dfrac{(1-3i)(-1+2i)}{1+4}$

$=\dfrac{5+5i}{5}=1+i$

$b=z_C-az_C=(1-a)z_C$

$=(1-1-i)(3-2i)$

$=-3i-2$

Donc :

$S: M(z)\longrightarrow M'(z')/$

$z'=(1+i)z-2-3i$

b) le rapport : $K=|1+i|=\sqrt{2}$

l'angle $\theta=\operatorname{Arg}(1+i)=\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

3°) $\varphi(z)=z^2-(5-i)z+8-i$

a) $\varphi(z)=(x+iy)^2-(5-i)(x+iy)+8-i$

$=x^2-y^2+2xyi-5x-5iy-xi+y+8-i$

$\Leftrightarrow \varphi(z)=x^2-y^2-5x-y+8$
$+i(2xy-5y-x-1)$

$\Gamma=\{M\in P \,/\, \varphi(z)$ est imaginaire pur non nul$\}$

$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\varphi)(z)=0$

$\Leftrightarrow x^2-y^2-5x-y+8=0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{5}{2})^2-(y+\frac{1}{2})^2-\frac{24}{4}+8=0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{5}{2})^2-(y+\frac{1}{2})^2=2$

$\Leftrightarrow -\dfrac{(x-\frac{5}{2})}{(\sqrt{2})^2}+\dfrac{(y+\frac{1}{2})^2}{(\sqrt{2})^2}=1$

Dans le repère $(\omega,\vec{i},\vec{j})$ avec $\omega(\frac{5}{2};-\frac{1}{2})$: Γ a pour équation :

$\dfrac{-x^2}{(\sqrt{2})^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$

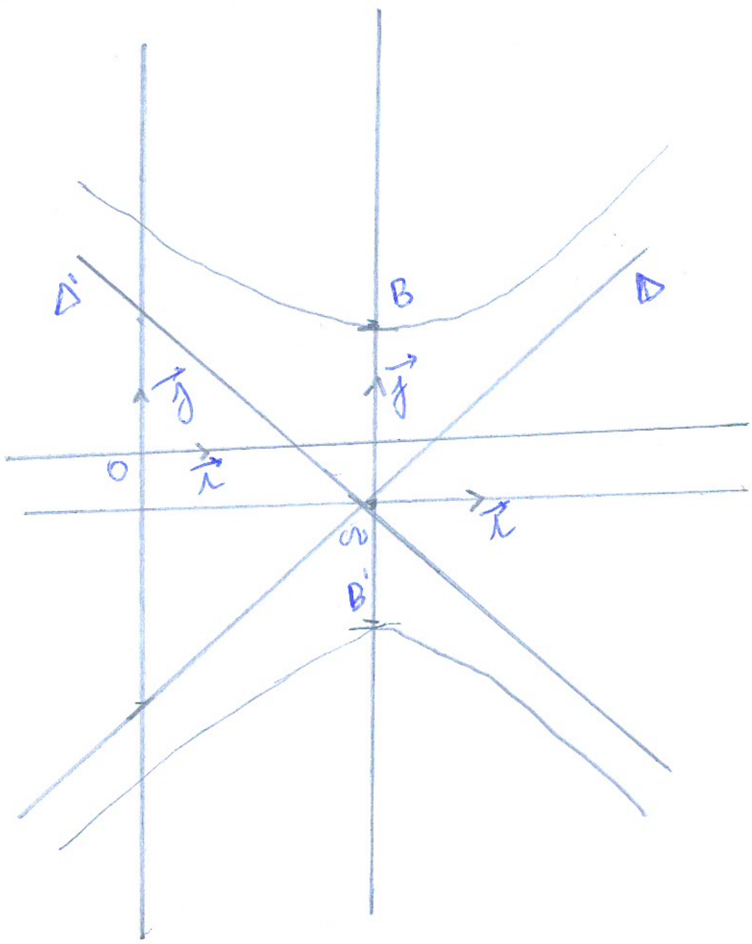
D'où Γ est une hyperbole de centre ω et de

b) sommets :

$B(0,\sqrt{2})$ dans le repère $(\omega,\vec{i},\vec{j})$

et $B'(0,-\sqrt{2})$

Mais dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ on a $B\left(\frac{5}{2},\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$ et $B'\left(\frac{5}{2};-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$
Les asymptotes Δ et Δ' ont pour équations dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
$\Delta : Y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} X = X$ et $\Delta' : Y = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} X = -X$ et Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
on a : $y + \frac{1}{2} = x - \frac{5}{2} \Leftrightarrow \Delta : y = x - 3$ et $y + \frac{1}{2} = -x + \frac{5}{2}$
$\Leftrightarrow \Delta' : y = -x + 2$



oumou selemeta | seyid

corrigé bac 2014 : S.N :

1) $P(2i)=(2i)^3+(1-2i)(2i)^2+(1-2i)(2i)-2i$

$=-8i-4(1-2i)+2i(1-2i)-2i$

$=-8i-4+8i+2i+4-2i=0$

$P(2i)=0$

	1	1-2i	1-2i	-2i
2i	↓	2i	2i	2i
	1	1	1	0

$\forall z\in\mathbb{C}.\ P(z)=(z-2i)(z^2+z+1)$

$P(z)=0 \Leftrightarrow (z-2i)(z^2+z+1)=0$

$\Leftrightarrow z=2i$ ou $z^2+z+1=0$

$\Delta=1-4=-3=3i^2=(i\sqrt{3})^2$

$z'=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$

$z''=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$

$S_{\mathbb{C}}=\left\{2i, -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$

$Im(2i)\geq Im\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\geq Im\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_0=2i,\ z_1=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$

Soit $M(x,y)$

$M\in(BC)\Leftrightarrow \det(\vec{BM},\vec{BC})=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+\frac{1}{2} & 0 \\ y-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3}\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow x+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow$

$2x+1=0$

b) $M\in(BC)\setminus\{B,C\}$

$\Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}+iy \,/\, y\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

or : $z'=\frac{1}{z^2+z+1}=\frac{1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

D'où : $z'=\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+iy+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{(iy)^2+\frac{3}{4}}$

$=\frac{1}{-y^2+\frac{3}{4}}\in\mathbb{R}$

Donc M' est sur l'axe des abscisses.

3) a) $f(z)=\frac{1}{z^2+z+1}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}z^2+\bar{z}z+\bar{z}}$

$=\frac{\bar{z}}{(\bar{z}z)z+\bar{z}z+\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{|z|^2\times z+|z|^2+\bar{z}}$

Donc si $|z|=1$ alors $|z|^2=1$

d'où $f(z)=\frac{\bar{z}}{z+1+\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}$

b) Si $z=e^{i\theta}$ alors $\bar{z}=e^{-i\theta}$ et $|z|=1$

Donc : $f(z)=\frac{e^{-i\theta}}{1+e^{i\theta}+e^{-i\theta}}=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

4) a) $M\in\mathcal{C}(O,1)\setminus\{B,C\}\Rightarrow z=e^{i\theta}$ et $\cos\theta\neq-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow z'=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

$\Rightarrow \begin{cases} x'=\frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ y'=\frac{-\sin\theta}{1+2\cos\theta}\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x'^2+y'^2=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{(1+2\cos\theta)^2}=\frac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \\ \text{et} \\ (2x'-1)^2=\left(\frac{2\cos\theta}{1+2\cos\theta}\right)^2=\frac{1}{(1+2\cos\theta)^2}\end{cases}$

D'où : $x'^2+y'^2=(2x'-1)^2$

b) $\Gamma : x^2+y^2=(2x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=4x^2-4x+1$

$\Leftrightarrow 3x^2-4x-y^2=-1$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)-y^2=-1$

$\Leftrightarrow 3\left[\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)-\frac{4}{9}\right]-y^2=-1$

$\Leftrightarrow 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-y^2=\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{(x-2/3)^2}{\frac{1}{9}}-\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$

$\Gamma : \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=1$

$\Gamma : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Donc Γ est une hyperbole de centre $\omega(\frac{2}{3}, 0)$ et de sommets $S_1 : (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}, 0) = (1, 0)$ et $S_2 : (\frac{2}{3} - \frac{1}{3}, 0) = (\frac{1}{3}, 0)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et d'excentricité $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{2/3}{1/3} = 2$