N° = 1003 ; Nom : Med / Ahmed Mahmoud / Taghi

- Bac 2012 S.C 5ème Ecriture

Exo 2 : $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ $D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$

1-a) les limites :

* $\lim\limits_{0^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{0^+} f(x) = -\infty}$

$x = 0$ A.V au voisinage de $-\infty$

* $\lim\limits_{1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{1^-} f(x) = -\infty}$

* $\lim\limits_{1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{1^+} f(x) = +\infty}$

$x = 1$ A.V

* $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0}$

$y = 0$ A.H au voisinage de $+\infty$

b) T.V de $f \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \times (x\ln x) - 1(\ln x + 1)}{(x\ln x)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{-(\ln x + 1)}{(x\ln x)^2}$ donc $(x\ln x)^2 \geq 0$

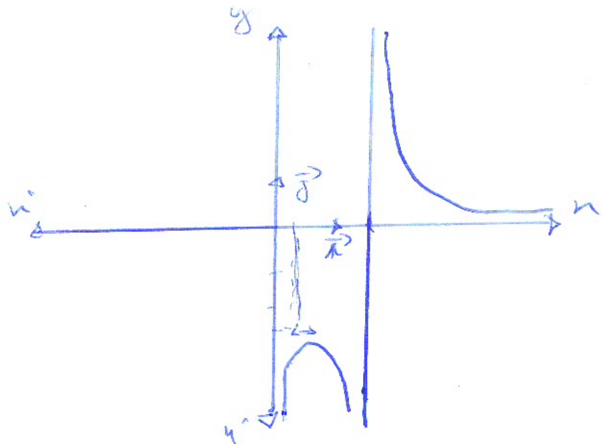
donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(\ln x + 1)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{e}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}} = -e$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0

c) la courbe (C)



2) $\forall n \geq 2$ $U_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} - \ln(\ln n) = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \dots + \frac{1}{n\ln n} - \ln(\ln n)$

a) Montrons que $\forall n \geq 2$

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n\ln n}$$

$n \leq t \leq n+1 \Rightarrow \ln n \leq \ln t \leq \ln(n+1)$

$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq f(t) \leq \frac{1}{n\ln n}$

$\Rightarrow \int_n^{n+1} \frac{dt}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{n\ln n}$

$\left[\frac{t}{(n+1)\ln(n+1)}\right]_n^{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \left[\frac{t}{n\ln n}\right]_n^{n+1}$

$$\boxed{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n\ln n}} \quad \forall n \geq 2$$

b) Montrons que $\forall n \geq 2$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \int_n^{n+1} f(t)\,dt$ En déduire le sens de U_n

$$U_{n+1}-U_n=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k\ln k}-\ln(\ln(n+1))-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k\ln k}+\ln(\ln n)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\left[\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln n)\right]$$

$$\boxed{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\int_n^{n+1}f(t)\,dt}\leq 0$$ donc U_n est décroissante ↘

C) Montrons que $\forall n\geq 2$

$U_{n+1}-U_n\geq f(n+1)-f(n)$ En déduire que

$U_n\geq -\ln(\ln 2)$

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\leq\int_n^{n+1}f(t)\,dt\leq\frac{1}{(n\ln n)}$$

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\int_n^{n+1}f(t)\,dt\geq\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\frac{1}{n\ln n}$$

$$\boxed{U_{n+1}-U_n\geq f(n+1)-f(n)}$$

On a $U_n-U_{n-1}\geq f(n)-f(n-1)$

(+) . . . .

(+) . . . .

$U_3-U_2\geq f(3)-f(2)$

$U_{n+1}-U_2\geq f(n+1)-f(2)$

$$U_n+\cancel{\frac{1}{2\ln 2}}+\ln(\ln 2)\geq\frac{1}{n\ln n}-\cancel{\frac{1}{2\ln 2}}$$

$$U_n+\ln(\ln 2)\geq\frac{1}{n\ln n}\geq 0$$

$$\boxed{U_n\geq-\ln(\ln 2)}$$

d) Comme U_n est décroissante et minorée donc elle est convergente

$$-\ln(\ln 2)\leq U_n\leq\frac{1}{2\ln 2}-\ln(\ln 2)$$

$$-\ln(\ln 2)\leq\lim_{+\infty}U_n\leq\frac{1}{2\ln 2}-\ln(\ln 2)$$

$$\boxed{-\ln(\ln 2)\leq \ell\leq\frac{1}{2\ln 2}-\ln(\ln 2)}$$

Fin