hatar ould Ahmed salime
1223
7C

Ecoles privees ERRaja
Ingenière de la reussite

Exercice : Bac D 2011 – SN

1) On pose $P(z) = z^3 - 5z^2 + 12z - 8$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(1)$.

b) Déterminer a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$ on a: $P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z) = 0$.

2) On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_1 = 1$, $z_2 = 2+2i$ et $z_3 = 2-2i$.

a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres z_1, z_2 et z_3.

b) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

3.a) Ecrire le nombre $\frac{z_2}{z_3}$ sous forme algébrique. En déduire la nature du triangle OBC.

b) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que $\left|\frac{z-1}{z-2-2i}\right| = 1$.

• Solution :

On a pour tout nombre Complexe :

$p(z) = z^3 - 5z^2 + 12z - 8$

1-a) En remplaçant z par 1 On obtient :

$$p(z) = 1^3 - 5(1)^2 + 12(1) - 8$$
$$= 1 - 5 + 12 - 8$$
$$= -4 + 4 = 0$$

b) pour determiner a et b tel Que :

$p(z) = (z-1)(z^2+az+b)$,

On peut Utiliser Une identification (Developper, reduire, Ordonner le Second membre et identification) :

$$(z-1)(z^2+az+b) = z^3+az^2+bz-z^2-az-b$$
$$= z^3+(a-1)z^2+(b-a)z-b$$

par identification On a :

$z^3-5z^2+12z-8=z^3+(a-1)z^2+(b-a)z-b$

pour tout $z\in\mathbb{C}$,

On obtient le systeme : $\begin{cases} a-1=-5 \\ b-a=12 \\ -b=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=8 \end{cases}$

Alors pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=(z-1)(z^2-4z+8)$

c) L'equation $p(z)=0$ equivaut à $z-1=0$ ou $z^2-4z+8=0$

Si $z-1=0$ On obtient La Solution $z_1=1$

Si $z^2-4z+8=0$ On a

$\Delta=16-32=-16=(4i)^2$

Les solution de Cette equation Sont :

$z_2=2+2i$ et $z_3=2-2i$

Ces solutions Sont Conjuguées car Les Coefficients Sont réel est le discriminent est négatif.

L'ensemble de Solution de L'equation $p(z)=0$ est :

$S=\{1,\ 2+2i,\ 2-2i\}$

2-) Le plan Complexe est rapporté a Un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Les points A, B, et C Sont d'affixes

$z_A=1$, $z_B=2+2i$, $z_C=2-2i$

a) Calcule de Modules et arguments :

$|z_1|=|1|=1$, $\arg z_1=0\,[2\pi]$

$|z_2|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\arg z_2=\pi/4\,[2\pi]$.

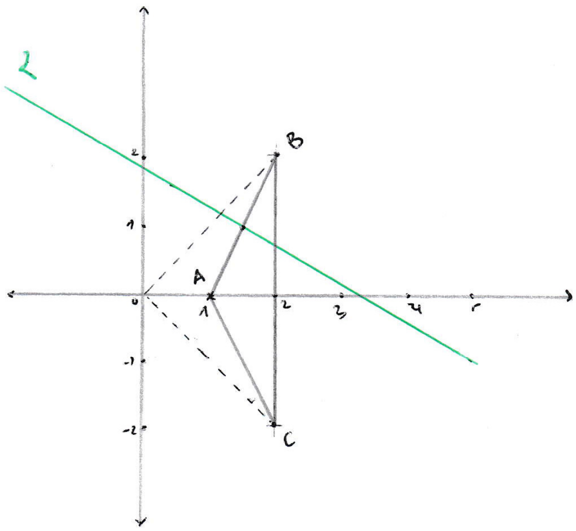
$|z_3|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\arg z_3=-\pi/4\,[2\pi]$.

Remarque : $z_2=\bar{z}_3 \Rightarrow (|z_2|=|z_3|$, $\arg z_2=-\arg z_3)$

b) Representation des points :

$z_A = 1$, $z_B = 2+2i$, $z_C = 2-2i$

donc $A(1,0)$, $B(2,2)$, $C(2,-2)$.



3-a) On a $\frac{z_2}{z_3} = \frac{2+2i}{2-2i} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$

On remarque que $\frac{z_2}{z_3} = \frac{z_B - z_O}{z_C - z_O}$ Alors $\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} = i$

d'où le triangle OBC est rectangle isocèle en O.

b) Une Methode :
pour determiner l'ensemble de points M d'affine z.
tellque $\left|\frac{z-z_B}{z-z_A}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{z-1}{z-2-2i}\right| = 1$

Alors $M \in \Gamma \Rightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Rightarrow AM = BM$.
D'ou L'ensemble Γ est La Mediatrice du segement [AB].

Fin.