EXERCICE 2 (5 POINTS)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 - (4-2i)z^2 + (4-6i)z - 4 + 8i$
   a) Calculer $P(-2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z) = (z+2i)(z^2+az+b)$
   b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.
2. Soient A, B et C les images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $|z_A| < |z_B| < |z_C|$.
   a) Placer les points A, B et C.
   b) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O;3),(A;-4),(B;1),(C;2)\}$. Vérifier que A est le barycentre du système $\{(O;5),(B;-5),(G;2)\}$.

3) On pose $Z = \dfrac{z - z_B}{z - z_A}$ Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) $\arg Z = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$

b) $2\arg Z = 2(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) \quad [2\pi]$

c) $|Z| = 2$

Solution :

1) $P(z) = z^3 - (4-2i)z^2 + (4-6i)z - 4 + 8i$

a) $P(-2i) = (-2i)^3 - (4-2i)(-2i)^2 + (4-6i)(-2i) - 4 + 8i$

$= -8i^3 - (4-2i)(4i^2) + (4-6i)(-2i) - 4 + 8i$

$= \cancel{8i} + 1\cancel{6} - \cancel{8i} - \cancel{8i} - \cancel{12} - \cancel{4} + \cancel{8i} = 0$

$\Rightarrow P(-2i) = 0$

$P(z) = (z+2i)(z^2 + az + b)$.

	1	$-4+2i$	$4-6i$	$-4+8i$
$-2i$	↓	$-2i$	$+8i$	$4-8i$
	1	-4	$4+2i$	0 0

donc $\boxed{a = -4}$ et $\boxed{b = 4+2i}$

$\Rightarrow P(z) = (z+2i)(z^2 - 4z + 4 + 2i)$

b) $P(z) = 0 \Rightarrow (z+2i)(z^2 - 4z + 4 + 2i) = 0$

$\Rightarrow z + 2i = 0$ ou $z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$

$\Rightarrow \boxed{z = -2i}$ ou $\Delta' = (2)^2 - (4+2i)\times 1$

$\Delta' = 4 - 4 - 2i = -2i = (1-i)^2$

$\delta' = 1 - i$ est une racine carrée de Δ',

$z_1 = \dfrac{2+1-i}{1} = \boxed{3 - i = z_1}$

$z_2 = \dfrac{2-1+i}{1} = \boxed{1 + i = z_2}$

$S = \{-2i, 3-i, 1+i\}$

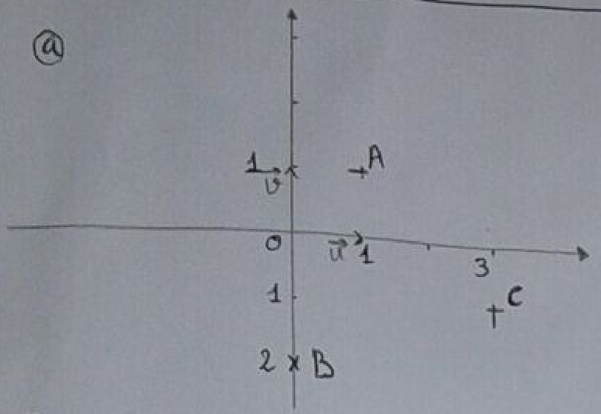
2) $|-2i| = 2$; $|3-i| = \sqrt{10}$ et $|1+i| = \sqrt{2}$

on a : $|z_A| < |z_B| < |z_C|$

donc $z_A = 1 + i$, $z_B = -2i$ et $z_C = 3 - i$

Nom : Fatimetou Abdellahi Seyid.

(a)



(b) $G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c} O & A & B & C \\ \hline 3 & -4 & 1 & 2 \end{array}$

$$z_G = \frac{3z_O - 4z_A + z_B + 2z_C}{3-4+1+2}$$

$$z_G = \frac{-4(1+i) - 2i + 2(3-i)}{2}$$

$$z_G = -2 - 2i - i + 3 - i = \boxed{1 - 4i = z_G}$$

Soit H un point tel que: $H = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} O & B & G \\ \hline 5 & -5 & 2 \end{array}$

Alors: $z_H = \dfrac{5z_O - 5z_B + 2z_G}{5-5+2}$

$$z_H = \frac{-5(-2i) + 2(1-4i)}{2} = 5i + 1 - 4i$$

$\boxed{z_H = 1 + i} \Rightarrow \boxed{z_H = z_A = 1 + i}$

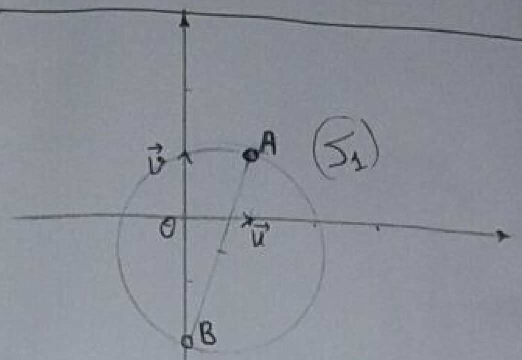
Donc: A = H

D'où: $A = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} O & B & G \\ \hline 5 & -5 & 2 \end{array}$

3) (a) $M \in S_1 \Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

S_1 est le cercle de diamètre [AB] privée de A et B.

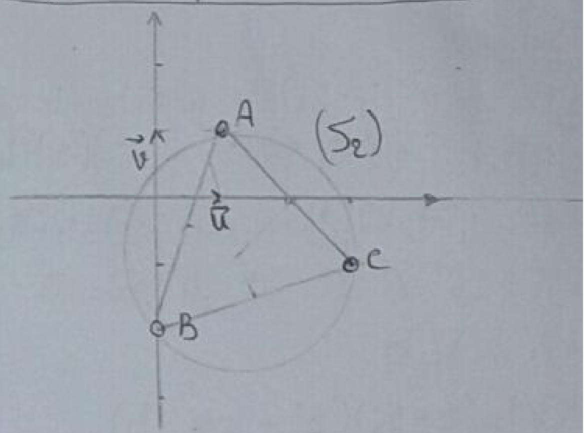


(b) $M \in S_2 \Leftrightarrow 2\arg(z) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow 2\arg\left(\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\ [2\pi]$

S_2 est le cercle circonscrit au triangle ABC privée de A et B



(c) $|z| = 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right| = 2$

$\boxed{\dfrac{BM}{AM} = 2}$

S_3 est le cercle de diamètre [IJ], où $I = \text{bar}\begin{array}{c|c} B & A \\ \hline 1 & 2 \end{array}$ et $J = \text{bar}\begin{array}{c|c} B & A \\ \hline 1 & -2 \end{array}$

(Donc $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BA}$)

Nom: Fatimetou Abdellahi Seyid.