Nom: Aghla houm / sidi
7D
Erraja

Exercice

On considère la suite numerique (U_n) définie par :

$U_0 = 2$, $U_{n+1} = \frac{1}{4} U_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Calculer U_1, U_2, U_3

2) Soit (V_n) la suite numerique définie par : $V_n = U_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Montrer que (V_n) est une SG, exprimer V_n puis U_n en fonction de n

3) Calculer $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

Solution

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{4} U_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n \end{cases}$$

$n = 0 \Rightarrow U_1 = \frac{1}{4} U_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^0$

$U_1 = \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$\boxed{U_1 = 1}$

$n = 1 \Rightarrow U_2 = \frac{1}{4} U_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^1$

$U_2 = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8}$

$\boxed{U_2 = \frac{5}{8}}$

$n=2 \Rightarrow U_3 = \frac{1}{4} U_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{4} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{16} = \frac{14}{32}$

$\boxed{U_3 = 7/16}$

2) $V_n = U_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$* \; V_{n+1} = U_{n+1} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$= \frac{1}{4} U_n + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$= \frac{1}{4} U_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$= \frac{1}{4} \left(U_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

$= \frac{1}{4} V_n$ Alors (V_n) est une suite géometrique de raison $\boxed{q = \frac{1}{4}}$

et de ~~raison~~ 1er terme

$V_0 = U_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n \Rightarrow V_0 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{V_0 = 1}$

Comme $V_n = V_0 \, q^n$ on a :

$V_n = U_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n \Rightarrow U_n = V_n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Alors $\boxed{U_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}$

3) $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

on pose $w_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$\Rightarrow U_n = V_n + W_n$

$S_n = (V_0 + W_0) + (V_1 + W_1) + \dots + (W_n + V_n)$

$S_n = (V_0 + V_1 + \dots + V_n) + (W_0 + W_1 + \dots + W_n)$

V_n est une SG avec $\boxed{q_1 = \frac{1}{4} \, , \; V_0 = 1}$

W_n est une SG avec $\boxed{q_2 = \frac{3}{4} \, , \; W_0 = 1}$

d'ou $S_n = V_0 \dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} + w_0 \dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}$

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} + \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + 4 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$S_n = \frac{16}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

3