Exercice 3

On considère la suite numérique (U_n) définie par : $U_0 = 2$, $U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer U_1, U_2, U_3.

2) Soit (V_n) la suite numérique définie par $V_n = U_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Montrer que (V_n) est une suite géométrique, exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

3) Calculer $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.

Nom : Zeinebou/cheikh.

classe : 7D I

école : Arraja (Arafate)

Solution

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n \end{cases}$$

1) $u_1 = ?$ $u_2 = ?$ $u_3 = ?$

• $n = 0$

$$u_1 = \frac{1}{4}u_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^0$$
$$= \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{2}(1)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$
$$= 1$$

$u_1 = 1$

• $n = 1$

$$u_2 = \frac{1}{4}\cdot u_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^1$$
$$= \frac{2}{8}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$$
$$= \frac{2}{8} + \frac{3}{8}$$

$u_2 = \frac{5}{8}$

• $n = 2$

$$u_3 = \frac{1}{4}\cdot u_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}$$
$$= \frac{5}{32} + \frac{9}{32}$$

$u_3 = \frac{7}{16}$

2) m.q (V_n) est une S.G

on a : $V_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$$V_{n+1} = u_{n+1} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$
$$= \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$
$$= \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$$
$$= \frac{1}{4}u_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^n$$
$$= \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$
$$= \frac{1}{4}\left(u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$$

$\boxed{V_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$

$$= \frac{1}{4}\cdot V_n$$

$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{4}\cdot V_n$

alors (V_n) est une S.G de raison $q = \frac{1}{4}$ et de 1er terme $V_0 = 1$

Suite Exo1

$S_n = u_0 + u_1 + \dots u_n$

$= (t_0 + w_0) + (t_1 + w_1) + \dots + (t_n + w_n)$

$= (t_0 + t_1 \dots + t_n) + (w_0 + w_1 + \dots + w_n)$

$= t_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{n+1}{2}(w_0 + w_n)$

$\boxed{S = u_p \cdot \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \quad S.G}$ $\boxed{S = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n) \quad S.A}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + \frac{n+1}{2}\left(\frac{3}{2} + \left(-2n + \frac{3}{2}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}(2^{n+1} - 1) + \frac{n+1}{2}(-2n+3)$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}(2^{n+1} - 1) + \frac{(n+1)(-2n+3)}{2}}$$

- $S'_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

on a:

$V_n = \frac{2^n + 4n - 3}{2}$

$= \frac{1}{2} \cdot (2^n) + 2n - \frac{3}{2}$

on Pose $l_n = \frac{1}{2} \cdot 2^n$ et

$R_n = 2n - \frac{3}{2}$

$\Rightarrow V_n = l_n + R_n$

avec l_n est une S.G et R_n S.A

$S'_n = (l_0 + R_0) + (l_1 + R_1) + \dots (l_n + R_n)$

$= (l_0 + l_1 \dots + l_n) + (R_0 + R_1 \dots + R_n)$

$= l_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{n+1}{2}(R_0 + R_n)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + \frac{n+1}{2}\left(-\frac{3}{2} + 2n - \frac{3}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}(2^{n+1} - 1) + \frac{(n+1)}{2}(2n-3)$

$$\boxed{S'_n = \frac{1}{2}(2^{n+1} - 1) + \frac{(n+1)(2n-3)}{2}}$$