Exemples sur les equations differentiells

Mohamed Mahmoud/Mohamed
N°= 1305 7D4
ElmaariF

1.a) Resoudre $y' + 5y = 0$

Sol $\Longrightarrow y(x) = Ae^{-5x}$; $A \in \mathbb{R}$

b) Determiner la solution qui verfie $y(3) = 8$

Sol $\Longrightarrow y(x) = 8e^{-5(x-3)}$

2.a) Resoudre $y'' + 3y' - 10y = 0$

Sol $\Longrightarrow$ Eq. caracteristique $r^2 + 3r - 10 = 0$

$\Delta = 3^2 + 4(1)(10) \Longrightarrow \Delta = 49 > 0$

$r_1 = \frac{-3+7}{2} = 2$; $r_2 = \frac{-3-7}{2} = -5$

$S = \{2, -5\} \Longrightarrow y(x) = Ae^{2x} + Be^{-5x}$; $A, B \in \mathbb{R}$

b) $y'' + 6y' + 9y = 0$

Sol : Eq.C : $r^2 + 6r + 9 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 \Longrightarrow \Delta = 0$

$r = \frac{-6}{2} \Longrightarrow r = -3$

$S = \{-3\} \Longrightarrow y(x) = (Ax + B)e^{-3x}$, $A, B \in \mathbb{R}$

c) $y'' + 6y' + 13y = 0$

Sol : EqC : $r^2 + 6r + 13 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4(1)(13)$

$= 36 - 52 \Longrightarrow \Delta = -16 < 0$

$r_1 = \frac{-6 + i\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-6+4i}{2} = -3 + 2i$

$r_2 = \frac{-6 - i\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-6-4i}{2} = -3 - 2i$

$S = \{-3 + 2i, -3 - 2i\}$

$y(x) = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{-3x}$

$A, B \in \mathbb{R}$

3) Soit l'éq : $y' + 3y = 3x + 1 + 5e^{2x}$: (E)

a) Résoudre l'éq : $y' + 3y = 0$: (E_0)

b) M.q la fonction $f(x) : x + e^{2x}$ est une sol particulière de (E)

c) Trouver la sol. gle de (E).

Sol :

a) $y(x) = Ae^{-3x}$, $A \in \mathbb{R}$

b) on a $f(x) = x + e^{2x}$

$\Rightarrow f'(x) = 1 + 2e^{2x}$

on remplace dans (E) :

$$f'(x) + 3f(x) = 1 + 2e^{2x} + 3(x + e^{2x})$$
$$= 1 + 2e^{2x} + 3x + 3e^{2x}$$
$$= 3x + 1 + 5e^{2x}$$

Alors f est une sol. particulier de (E)

c) la sol. gle de (E) est la somme de la sol. gle de (E_0) : $y(x) = Ae^{-3x}$ et la sol particulière de (E) :

$$f(x) = x + e^{2x}$$

Donc $\underline{y(x) = x + e^{2x} + Ae^{-3x} , A \in \mathbb{R}.}$

Formules :

1^{er} ordre

$y' + ay = 0 \Longrightarrow y(x) = Ae^{-ax}$

$y(x_0) = y_0 \Longrightarrow y(x) = y_0 e^{-a(x - x_0)}$

2^{nd} ordre

$y'' + ay' + by = 0$

Eq. Car : $r^2 + ar + b = 0$

$\Delta = a^2 - 4b$

- $\Delta > 0$; $S\{r_1 ; r_2\} \Longrightarrow y(x) = (Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x})$
- $\Delta = 0$; $S = \{r\} \Longrightarrow y(x) = (Ax + B)e^{rx}$
- $\Delta < 0$; $S = \{\alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}$; $y(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$

avec 2^{nd} membre

Méthode : Equation (E) avec 2^{nd} membre

1) Résolution de E_0 (Sans 2^{nd} membre) ; soit y_0

2) Sol. Particulier de (E) avec 2^{nd} membre.

3) Somme de sol. gle de (E_0) et le sol. Particulier de (E)