# FATIMETOU HAFEDH

ERRAJA

# Intégrales 8

**Exercice 8** On pose $I = \int_0^{\pi/2} x\sin^2 x\,dx$ ; $J = \int_0^{\pi/2} x\cos^2 x\,dx$.

1. Calculer $I+J$
2. En utilisant une intégration par parties, calculer $I-J$
3. En déduire $I$ et $J$

**Solution** ① $I+J = \int_0^{\pi/2} (x\sin^2 x + x\cos^2 x)\,dx$

$I+J = \int_0^{\pi/2} x(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx$

$I+J = \int_0^{\pi/2} x\,dx$

$I+J = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi/2}$

$I+J = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0^2\right)$

$\boxed{I+J = \frac{\pi^2}{8}}$

② on a $I-J = \int_0^{\pi/2} (x\sin^2 x - x\cos^2 x)\,dx$

$I-J = \int_0^{\pi/2} x(\sin^2 x - \cos^2 x)\,dx$

$I-J = \int_0^{\pi/2} (-x\cos 2x)\,dx$

on utilise une intégration par parties :

on pose $\begin{cases} u(x) = -x \\ v'(x) = \cos 2x \end{cases}$

alors $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

Comme $\int uv' = uv - \int u'v$

$I-J \left[-x \times \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$

$I-J = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sin 2x)\,dx$

$I-J = \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi/2} \Rightarrow$

$I-J = \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi/2}$

$I-J = -\frac{1}{4}\cos\pi + \frac{1}{4}\cos 0$

$\boxed{I-J = \frac{1}{2}}$

③ on résout les système :

$\begin{cases} I+J = \frac{\pi^2}{8} \\ I-J = \frac{1}{2} \end{cases}$

Par addition : $2I = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\boxed{I = \frac{\pi^2+8}{16}}$

Par soustraction : $2J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\boxed{J = \frac{\pi^2-8}{16}}$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

# FATIMETOU HAFEDH

## Intégrales

ERRAJI

**Exercice 6** Pour tout entier naturel $n$ on pose : $U_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^2}$

① Prouver que l'écriture précédente définit bien une suite numérique $(U_n)$.

② Montrer que la suite $(U_n)$ est décroissante et positive. En déduire qu'elle est convergente

③ Montrer que $\lim_{n \to \infty} U_n = 0$

**Solution :** $U_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$

① La fonction $t \to \frac{t^n}{1+t^2}$ est rationnelle et continue sur $[0;1]$ pour tout $n$. alors l'intervalle $U_n$ existe d'où l'écriture défini une suite numérique

② $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^{n+1} \leq t^n$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{t^{n+1}}{t^2+1} \leq \frac{t^n}{t^2+1}$

$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t^2+1} dt \leq \frac{t^n}{t^2+1} dt$

$0 \leq U_{n+1} \leq U_n \quad \forall n$

alors est décroissante et positif

Donc minorée (Par zéro) et décroissante Donc :

$\boxed{U_n \text{ est Convergente}}$

③ $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow (+1) = 1 \leq 1+t^2 \leq 2 \Rightarrow$

on l'inverse $= \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1 \Rightarrow (\times t^n)$

$\frac{1}{2} t^n \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$

$\int_0^1 \frac{1}{2} t^n dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^n dt$

$\left[ \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} t^n \right]_0^1 \leq U_n \leq \left[ \frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^1$

★ $\boxed{\frac{1}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}}$

Théorème de gendarme $\Rightarrow$

$\boxed{\lim_{n \to \infty} U_n = 0}$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php