Nom : Mohamed / Bamba
N° : 1808
classe : 7 C

Bac : 2013 S.C

Exercice : 3

Soit $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2\ln x}{x^2 - \ln x}, & x > 0 \\ f(0) = -2 \end{cases}$

1/ a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2\ln x}{x^2 - \ln x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2\cancel{\ln x}}{\cancel{\ln x}\left(\frac{x^2}{\ln x} - 1\right)}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2}{\frac{x^2}{\ln x} - 1} = \dfrac{2}{0 \times \frac{1}{-\infty} - 1} = \dfrac{2}{0-1}$

$= -2 = f(0)$

Donc : f est continue en 0^+

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) + 2}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2\cancel{\ln x} + 2x^2 - 2\cancel{\ln x}}{x(x^2 - \ln x)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(x^2 - \ln x)}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x}{x^2 - \ln x} = 2 \times 0 \times \dfrac{1}{0 + \infty}$

$= 0 \times 0 = 0 = f'_d(0)$

où : f est dérivable a 0^+.

Interpretation graphique :

admet au point $(0, -2)$ une demi-tangent horizontale.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln x}{x^2 - \ln x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln x}{x^2} \times \dfrac{1}{1 - \frac{\ln x}{x^2}}$

$= 2 \times 0 \times \dfrac{1}{1 - 0} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

* interpretation graphique :

la droit d'équation $y = 0$ est un asymptôte horizontal (A.H) de $\mathcal{C}$ en $+\infty$

2) a) $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{x} \cdot (x^2 - \ln x) - 2\ln x \left(2x - \frac{1}{x}\right)}{(x^2 - \ln x)^2}$

$= \dfrac{2x^2 - \cancel{2\ln x} - 4x^2 \ln x + \cancel{2\ln x}}{x(x^2 - \ln x)^2}$

$= \dfrac{2x^{\cancel{2}}(1 - 2\ln x)}{\cancel{x}(x^2 - \ln x)^2} = \dfrac{2x(1 - 2\ln x)}{(x^2 - \ln x)^2}$

$$\boxed{f'(x) = \dfrac{2x(1 - 2\ln x)}{(x^2 - \ln x)^2}}$$

Suite Exercice 3 :

On a :

2/a) $f'(x) = \dfrac{2x(1-2\ln x)}{(x^2-\ln x)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1-2\ln x = 0$

$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{e}}$

T.V $\quad f(\sqrt{e}) \approx 0{,}5$

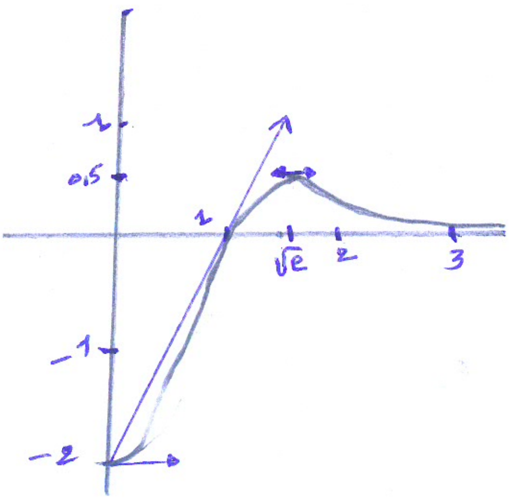
x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$0{,}5$	$\searrow$	0

b) Equation de la tangente de C_f en $x_0 = 1$

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\boxed{y = 2x-2}$

c) Courbe de f (C_f) :



a) La fonction $t \longmapsto t f(t)$ est continue et dérivable car elle est le produit de fonction continue et dérivable en $[0, +\infty[$ d'où : F est dérivable

$F'(x) = x f(x) \Rightarrow \boxed{F'(x) = \dfrac{2x\ln x}{x^2-\ln x}}$

- Mais pour $x \geq 1$ on a : $f(x) \geq 0$

$\Rightarrow x f(x) \geq 0$ alors : $F'(x) \geq 0$

d'où : F est croissante

b) On a : $g(t) = \dfrac{2x\ln x}{x^2-\ln x} = \dfrac{2\ln x}{x-\frac{\ln x}{x}}$

avec : $x \geq 1 \Rightarrow \dfrac{\ln x}{x} \geq 0$

$\Rightarrow -\dfrac{\ln x}{x} \leq 0 \Rightarrow x - \dfrac{\ln x}{x} \leq x$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x-\frac{\ln x}{x}} \geq \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{2\ln x}{x-\frac{\ln x}{x}} \geq \dfrac{2\ln x}{x}$

d'où : $\boxed{g(x) \geq \dfrac{2\ln x}{x}}$

alors : $x g(x) \geq 2\ln x$

$\Rightarrow F(x) = \int_1^x \cancel{x} g(x)\,dx \geq 2\int_1^x \ln x\,dx$

donc : $F(x) \geq 2[x\ln x - x]_1^x$

$\Rightarrow F(x) \geq 2x\ln x - 2x + 2$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\ln x - 2x + 2 = +\infty$

Donc : D'après le Théorème de comparaison :

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

c) T.V de F :

x	1		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
$F(x)$		$\nearrow$	$+\infty$

Nom : Mohamed /Bamba Keibed

Classe : 7c

Correction du Bac 2013 SC

Exercice : 3

Soit $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2\ln x}{x^2 - \ln x} \\ f(0) = -2 \end{cases}$

1/a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2\ln x}{x^2 - \ln x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2}{\frac{x^2}{\ln x} - 1} = \dfrac{2}{0-1} = -2 = f(0)$

d'où : f et continue en 0^+

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)+2}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cancel{2\ln x} + 2x^2 - \cancel{2\ln x}}{x(x^2 - \ln x)}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x}{(x^2 - \ln x)} = 2 \times 0 \times 0 = 0 \, f'_d(0)$

Donc : f st derivable a 0^+.

- interpretation graphique :

C admet au point $(0,-2)$ une demi-tangent horizontale.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln x}{x^2 - \ln x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln x}{x^2} \times \dfrac{1}{1 - \frac{\ln x}{x^2}}$

$= 2 \times 0 \times \dfrac{1}{1-0} = 0$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

- interpretation graphique :

- la droit d'équation $y = 0$ st un

Symptote horizontal de C en $+\infty$

2/a) $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{x}(x^2 - \ln x) - 2\ln x(2x - \frac{1}{x})}{(x^2 - \ln x)^2}$

$= \dfrac{2x^2 - \cancel{2\ln x} - 4x^2 \ln x + \cancel{2\ln x}}{x(x^2 - \ln x)^2}$

$= \dfrac{2x^{\cancel{2}}(1 - 2\ln x)}{\cancel{x}(x^2 - \ln x)^2}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x(1 - 2\ln x)}{(x^2 - \ln x)^2}}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2\ln x = 0$

$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{e}}$

TV de f :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$f(\sqrt{e})$	$\searrow$	0

2) Equation de la tangente de C en $x_0 = 1$

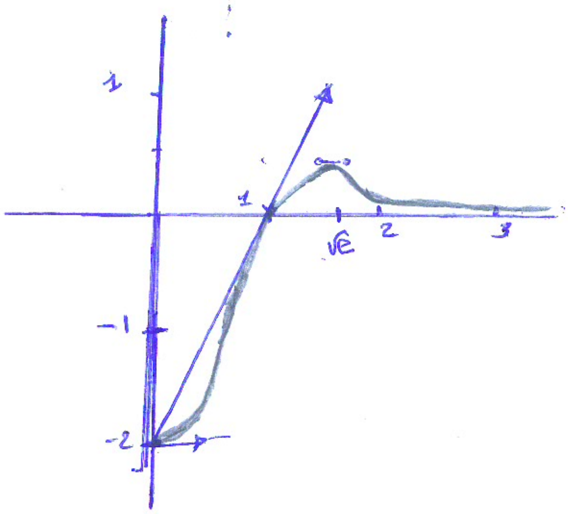
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$\Rightarrow y = f'(1)(x-1) + \cancel{f}(1)$

$y = 2(x-2) \Rightarrow \boxed{y = 2x + 2}$

Suite Exercice 3

2/c) Courbe de f (C_f) :



3/a) La fonction $t \longrightarrow t f(t)$ est continue et dérivable car elle est le produits des fonction continues et dérivable en $[0, +\infty[$.

d'où : F est dérivable.

$$F'(x) = x f(x) \Rightarrow \boxed{F'(x) = \frac{2x \ln x}{x^2 - \ln x}}$$

Mais pour $x \geq 1$ on a : $f(x) \geq 0$

$\Rightarrow x f(x) \geq 0$ alors $F'(x) \geq 0$

alors : F est croissante.

b/ On a : $g(t) = \dfrac{2t \ln t}{t^2 - \ln t} = \dfrac{2t \ln t}{t\left(t - \frac{\ln t}{t}\right)}$

$$\Rightarrow \boxed{g(t) = \frac{2 \ln t}{t - \frac{\ln t}{t}}}$$

avec : $t \geq 1 \Rightarrow \dfrac{\ln t}{t} \geq 0$

$\Rightarrow -\dfrac{\ln t}{t} \leq 0 \Rightarrow t - \dfrac{\ln t}{t} \leq t$

$\Rightarrow \dfrac{1}{t - \frac{\ln t}{t}} \geq \dfrac{1}{t}$

$\Rightarrow \dfrac{2 \ln t}{t - \frac{\ln t}{t}} \geq \dfrac{2 \ln t}{t}$

Donc : $\boxed{g(t) \geq \dfrac{2 \ln t}{t}}$

alors : $t g(t) \geq 2 \ln t$

$$F(t) = \int_1^x t g(t)\,dt \geq 2\int_1^x \ln t\,dt$$

$\Rightarrow F(t) \geq 2\left[t \ln t - t\right]_1^x$

$F(t) \geq 2x \ln x - 2x + 2$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x \ln x - 2x + 2$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} 2x(\ln x - 1) + 2$

$= +\infty$

d'où : D'après Théorème de comparaison $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty}$

c/ TV de $F(x)$:

x	1		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Fin.

Nom: Mohamed / Bamba Keibed
classe: 7C

Corrigé du Bac 2017 SC

Exercice 2

$$g(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2$$

a/ $D_g =]-\infty, +\infty[$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim(-x^3)^3 = -(-\infty) = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{+\infty}(-x^3) = -(+\infty) = -\infty$

$g'(x) = -3x^2 - 2x - 2 \Rightarrow g'(x) = 0$

$-3x^2 - 2x - 2 = 0$

$\Delta = 4 - 24 = -20 < 0$

D'où: $g'(x) < 0$

TV:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$+\infty$

b/ D'après le TV g est continue et strictement monotone

Donc: g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

c/ Comme g réalise une bijection donc: l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution car $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Et on a: $g(0,6) \approx 0,22 > 0$

$g(0,7) \approx -0,23 < 0$

$\Rightarrow g(0,6) \cdot g(0,7) < 0$

d'où: $\boxed{0,6 < \alpha < 0,7}$

② Soit $f(x) = \dfrac{2xe^{-x}}{x^2+2}$

a/ $f'(x) = \dfrac{(2e^{-x} - 2xe^{-x})(x^2+2) - (2xe^{-x})(2x)}{(x^2+2)^2}$

$= \dfrac{2x^2e^{-x} + 4e^{-x} - 2x^3e^{-x} - 4xe^{-x} - 4x^2e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

$= \dfrac{-2x^3e^{-x} - 2x^2e^{-x} - 4xe^{-x} + 4e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

$= \dfrac{2e^{-x}(-x^3 - x^2 - 2x + 2)}{(x^2+2)^2}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+2)^2}}$$

b/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2xe^{-x}}{x^2+2}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2}\left(\dfrac{2x}{1+\frac{2}{x^2}}\right) = +\infty \times (-\infty)$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x^2+2} e^{-x}$

$= 0 \times 0 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

Nom : Mohamed / Bamba Keibed
Classe : 7C

Corrigé du Bac 2011 SC :

Exercice : 2

$$g(x) = -x^3 - x^2 + 2x + 2$$

a/ $D_f =]-\infty, +\infty[$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = -(-\infty)^3$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty}$

- $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^3) = -(+\infty)^3$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$

$g'(x) = -3x^2 - 2x - 2 \Rightarrow g'(x) = 0$

$\Rightarrow -3x^2 - 2x - 2 = 0$

$\Delta = 4 - 24 = -20 < 0$

D'ou : $g'(x) < 0$

TV =

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

2) D'après le TV g est continue et strictement monotone

Donc : g realise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

c/ Comme g realise un bijection donc : l'equation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution car $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Et on a : $g(0,6) \approx 0,22 > 0$

$g(0,7) = -0,23 < 0$

$\Rightarrow g(0,6) \times g(0,7) \leq 0 \Rightarrow 0,6 \leq \alpha \leq 0,7$

2 soit : $f(x) = \dfrac{2xe^{-x}}{x^2+2}$

a/ $f'(x) = \dfrac{(2e^{-x} - 2xe^{-x})(x^2+2) - 2x \cdot 2xe^{-x}}{(x^2+2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2x^2e^{-x} + 4e^{-x} - 2x^3e^{-x} - 4xe^{-x} - 4x^2e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2x^2e^{-x} - 2x^3e^{-x} - 4x^2e^{-x} - 4xe^{-x}}{(x^2+2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2e^{-x}(-x^3 - x^2 + 2x + 2)}{(x^2+2)^2}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+2)^2}}$$

b/ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{2xe^{-x}}{x^2+2}$

$= \lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2}\left(\dfrac{2x}{1+\frac{2}{x^2}}\right)$

$= (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^2+2} e^{-x}$

$= 0 \times 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

Exercice 2 (suite)

2/b) on a : $f'(x) = \dfrac{2g(x)\cdot e^{-x}}{(x^2+1)^2}$

le signe $f'(x)$ est seul de $g(x)$

avec : $g(\alpha)=0$

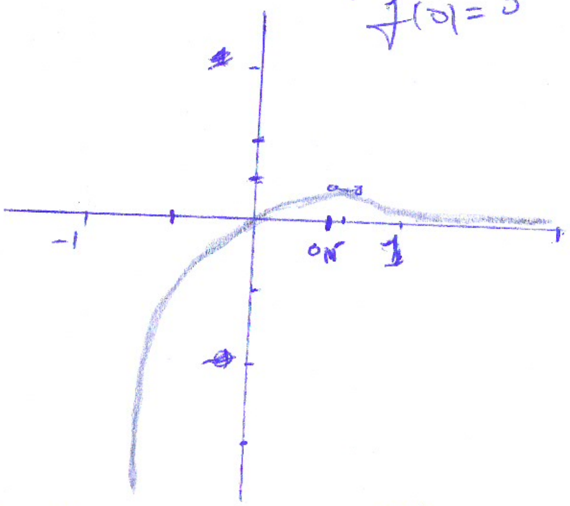
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

D'où : TV de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

$\alpha \approx 0,65 \quad \rightarrow f(\alpha) \approx 0,28$

$f(0)=0$



3) a) $\forall n \geq 1 \quad U_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt$

on a : $n \leq t \leq n+1$

et $t \geq 1 \quad \Rightarrow (t-1)^2 \geq 0$

$\Rightarrow t^2-2t+1 \geq 0 \Rightarrow t^2+1 \geq 2t > 0$

$\Rightarrow t^2+2 \geq t^2+1 \Rightarrow t^2+2 > 2t$

$\Rightarrow 0 \leq \dfrac{2t}{t^2+2} \leq 1$

$0 \leq \dfrac{2te^{-t}}{t^2+2} \leq e^{-t}$

On intègre : $0 \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{2te^{-t}}{t^2+2}\,dt \leq \int_n^{n+1} e^{-t}\,dt$

$0 \leq U_n \leq \left[-e^{-t}\right]_n^{n+1}$

$0 \leq U_n \leq e^{-n} - e^{-n-1}$

$$\boxed{0 \leq U_n \leq \left(1-\frac{1}{e}\right)e^{-n}}$$

on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{e}\right)e^{-n} = 0$

d'où : D'après T.g $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0}$

b) pour que $U_{n_0} \leq 10^{-5}$ alors

Il suffit $\left(1-\frac{1}{e}\right)e^{-n_0} \leq 10^{-5}$

$\Rightarrow e^{-n_0} \leq \dfrac{10^{-5}}{\left(1-\frac{1}{e}\right)}$

$\Rightarrow -n_0 \leq \ln\left(\dfrac{10^{-5}}{1-\frac{1}{e}}\right)$

$n_0 \geq -\ln\left(\dfrac{10^{-5}}{1-\frac{1}{e}}\right)$

$n_0 \geq \ln\left(\left(1-\frac{1}{e}\right)\cdot 10^{5}\right)$

$n_0 \geq \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) + \ln(10^5)$

$\Rightarrow n_0 \geq 12$

d'où à partir $n_0 = 12$ on a :

$$\boxed{0 \leq U_n \leq 10^{-5}}$$