Nom: Mohamed/Brahim vall
N°: 1346
Ecole: ERRaya

BAC 2015 SC

Exo:4

Soit $f(x) = \frac{x+1}{e^x} = (x+1)e^{-x}$

1) a) Dresser le T.V de f

$D_f:]-\infty;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty}\left(\frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x}\right) = 0$

$f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x}$
$= -x e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

b) Tracer $\mathcal{C}$

$\mathcal{C} \cap ox$: $f(x) = 0 \Rightarrow x+1=0$
$x = -1$; $A(-1;0)$

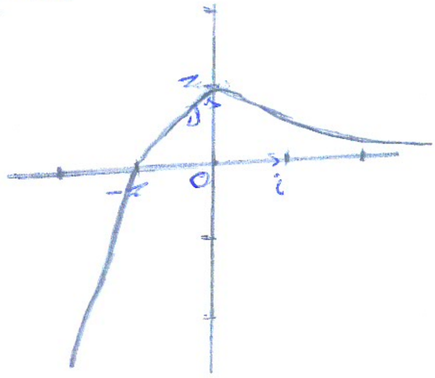
$\mathcal{C} \cap oy$: $f(0) = 1$
$B = (0;1)$

Branche infinie

$y=0$ AH au voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{-\infty}\left[\frac{x+1}{x} \cdot e^{-x}\right]$
$= +\infty$

$\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (oy)



2) $\forall n \geq 1$

$f_n(x) = \frac{(1+x)^n}{e^x} = (1+x)^n e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $F_n(x) = \int_{-1}^{x} f_n(t)\,dt$

Montrons que $\forall n \geq 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$

Faisons l'intégration par partie

$F_{n+1}(x) = \int_{-1}^{x} (1+t)^{n+1} e^{-t}\,dt$

On pose $\begin{cases} u(t) = (1+t)^{n+1} \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ $\begin{cases} u'(t) = (n+1)(1+t)^n \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$

$F_{n+1}(x) = \left[-(1+t)^{n+1} e^{-t}\right]_{-1}^{x} + (n+1)\int_{-1}^{x} (1+t)^n e^{-t}\,dt$

$F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - (1+x)^{n+1}e^{-x}$

$\boxed{F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)}$

3) Soit $I_n = F_n(0) = \int_{-1}^{0} f_n(t)\,dt$

a) Vérifier que $\forall n \geq 1$: $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$

de l'égalité

$F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$

on prend $\boxed{x=0}$

$F_{n+1}(0) = (n+1)F_n(0) - f_{n+1}(0)$

$\boxed{I_{n+1} = (n+1)I_n - 1}$

②

b) Montrons que la suite (I_n) est décroissante et positive

on rappelle que

$\forall x \in [0,1]\quad 0 \leq x^{n+1} \leq x^n \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq t \leq 0$

$0 \leq 1+t \leq 1$

$0 \leq (1+t)^{n+1} \leq (1+t)^n$

$0 \leq (1+t)^{n+1} e^{-t} \leq (1+t)^n e^{-t}$

$0 \leq \int_{-1}^{0} (1+t)^{n+1} e^{-t}\,dt \leq \int_{-1}^{0} (1+t)^n e^{-t}\,dt$

$0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

donc (I_n) est décroissante et positive

c) Montrons que $\forall n \geq 1$

$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$

d'une part.

$I_{n+1} \leq I_n$ car $(I_n) \downarrow$

$(n+1)I_n - 1 \leq I_n$

$nI_n + I_n - 1 \leq I_n$

$\Rightarrow I_n \leq \frac{1}{n}$

. d'autre part : (I_n) positive

$0 \leq I_{n+1}$

$0 \leq (n+1)I_n - 1$

$1 \leq (n+1) I_n$

$\frac{1}{n+1} \leq I_n$

donc :

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}}$$

on déduit que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

4) $\forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{I_n}{n!}$

a) Montrons que $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{(n+1)!}$

on rappelle que

$(n+1)! = (n+1)\,n!$

on a : $I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$

$\Rightarrow \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)I_n}{(n+1)\,n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

$$\boxed{= u_{n+1} = u_n - \frac{1}{(n+1)!}}$$

Déduisez que : $u_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

on a : $u_1 = \frac{I_1}{1!} = I_1$

$I_1 = \int_{-1}^{0} (1+t)\, e^{-t}\,dt \qquad$ IPP $\begin{cases} u(t) = 1+t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$

$\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$

$u_1 = \left[-(1+t)e^{-t}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-t}\,dt$

$u_1 = \left[-(1+t)e^{-t}\right]_{-1}^{0} + \left[-e^{-t}\right]_{-1}^{0}$

$u_1 = -1 - 1 + e \Rightarrow \boxed{u_1 = e - 2}$

on a : $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{(n+1)!}$ alors

$u_2 = u_1 - \frac{1}{2!}$

$u_3 = u_2 - \frac{1}{3!}$

$u_4 = u_3 - \frac{1}{4!}$

Par addit°

$u_n = u_1 - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!}\right)$

$u_n = e - 2 - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \cdots \frac{1}{n!}\right)$

$u_n = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$

$u_n = e - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$

$u_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$; on sait que : $\lim_{+\infty} u_n = \ldots$

$\lim_{+\infty} \frac{I_n}{n} = 0$; $\Rightarrow \lim_{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$