Nom : Mohamed/Bamba Keibed

Classe : 7C

Corrigé du Bac 2015 Sn :

Exercice : 3

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{x}}$$

1/a/ • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{x}}$

$= \frac{1}{1+0} = 1 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

* Interpretation graphique :

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ $y = 1$ AH au Voisinage de $-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $y = 0$ AH au Voisinage de $+\infty$

b) $f'(x) = \frac{-e^{x}}{(1+e^{x})^{2}} \Rightarrow f'(x) < 0$

TV :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

f est continue et strictement decroissent sur $\mathbb{R} \Rightarrow f(\mathbb{R}) =]0, 1[$

Alors $f : \mathbb{R} \to]0,1[$ est bijective $J =]0,1[$

pour exprimer $f^{-1}(x)$ on pose $y = f(x)$

On a : $y = \frac{1}{1+e^{x}} \Rightarrow y + ye^{x} = 1$

$\Rightarrow e^{x} = \frac{1-y}{y} \Rightarrow$ ~~Lnx~~ $x = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$

Donc : $\boxed{f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)}$ $x \in]0,1[$

2/ a) On Verifier un égalité du type :

$f(2a-x) + f(x) = 2b$ avec : $(a, b) = (0, \frac{1}{2})$

On a : $f(2a-x) = f(-x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \frac{\times e^{x}}{\times e^{x}}$

$= \frac{e^{x}}{e^{x}+1}$

Donc : $f(2a-x) + f(x) = \frac{e^{x}}{1+e^{x}} + \frac{1}{1+e^{x}}$

$= 1 = 2 \times \frac{1}{2} = 2b$

Donc : $\Omega(0, \frac{1}{2})$ est un Centre de symetrie de la courbe (C).

b/ les Courbes (C) et (C') sont symetrique par rapport a la droite d'equation $y = x$, s'il se coupent en un points d'abscisse x, alors x Verifie $f(x) = x \Rightarrow f(x) - x = 0$

On pose : $\varphi(x) = f(x) - x$

φ est derivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$

avec : $\varphi'(x) = f'(x) - 1$

$\varphi'(x) = \frac{-e^{x}}{(1+e^{x})^{2}} - 1 = -\left(1 + \frac{e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}\right)$

Il est claire que pour tout x de $\mathbb{R}$ $\varphi'(x) < 0$, φ est strictement decroissente

On a : $\begin{cases} \varphi(0{,}4) \approx 1{,}3 \times 10^{-3} > 0 \\ \varphi(0{,}5) \approx -0{,}12 < 0 \end{cases}$

Exercice 3 (suite)

3/ a/ D'après b/ en multipliant par $f^{n-1}(x)$

On obtient : $f'(x)\cdot f^{n-1}(x) = f^{n+1}(x) - f^{n}(x)$

par intégration de 0 à α

$$\int_0^\alpha f'(x)\cdot f^{n-1}(x)\,dx = \int_0^\alpha f^{n+1}(x)\,dx - \int_0^\alpha f^{n}(x)\,dx$$

$$\left[\frac{1}{n} f^{n}(x)\right]_0^\alpha = I_{n+1} - I_n$$

$$\frac{1}{n}\left(f^{n}(\alpha) - f^{n}(0)\right) = I_{n+1} - I_n$$

$$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\boxed{I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)}$$

b) on a : $\alpha > 0$ et pour tout entier naturel non nul n f^n est continue et positive sur $[0, \alpha[$

Alors : $\int_0^\alpha f^n(t)\,dt \geq 0 \Rightarrow I_n \geq 0$

Donc : (I_n) est positive.

D'autre par tout entier naturel non nul n on a :

$$0 \leq \alpha \leq 0{,}5 \Rightarrow 0 \leq \alpha^n \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow \alpha^n - \frac{1}{2} \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0$$

D'où : (I_n) est décroissante.

On déduit que la suite (I_n) est convergente, car décroissante et minorée.

4/ a/ on sait que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Donc : si $0 \leq t \leq \alpha$

$$f(\alpha) \leq f(t) \leq f(0)$$

$$\Rightarrow \alpha \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$$

$$\alpha^n \leq f^n(t) \leq \frac{1}{2^n}$$

on intègre de 0 à α

$$\int_0^\alpha \alpha^n\,dt \leq \int_0^\alpha f(t)\,dt \leq \int_0^\alpha \frac{1}{2^n}\,dt$$

$$\alpha^n [t]_0^\alpha \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}[t]_0^\alpha$$

$$\boxed{\alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}}$$

Comme $0 < \alpha < 1$

On a : $\lim_{n\to+\infty} \alpha^{n+1} = 0$

On a aussi : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0$

Alors : D'après T.G

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$