Nom: Mohamed d'Brahim Vall
N°: 1346
ecole: ERRaja

BAC 2011 SC

Exo 2

1) $g(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2$

a) • $D_g = \mathbb{R}$ (fonct° Polynome)

• $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{-\infty}(-x^3) = (-\infty)^3$

$= -(-\infty)$

$\boxed{\lim\limits_{-\infty} g(x) = +\infty}$

• $\lim\limits_{+\infty} g(x) = \lim\limits_{+\infty}(-x^3) = -(+\infty)^3$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{+\infty} g(x) = -\infty}$

La dérivée et T.V de g

$g'(x) = -3x^2 - 2x - 2$

$\Delta = (-2)^2 - 4(-3)(-2)$

$\Delta = 4 - 24 = -20 < 0$

D'ou $g'(x) < 0$

T.V

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

b) M.q g réalise une bijection

D'apres le T.V g est Continue et strictement decroissant donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

c) Comme g réalise une bijection donc l'equation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ un unique solution α

Car $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

et on a: $g(0,6) = -(0,6)^3 - (0,6)^2 - 2(0,6) + 2$

$\Rightarrow g(0,6) = +0,22 > 0$

et $g(0,7) = -(0,7)^3 - (0,7)^2 - 2(0,7) + 2$

$\Rightarrow g(0,7) = -0,23 < 0$

D'ou $0,6 < \alpha < 0,7$

② On Considère la fonct° définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x e^{-x}}{x^2+2}$

a) $f'(x) = \dfrac{(2e^{-x} - 2x e^{-x})(x^2+2) - 2x(2x e^{-x})}{(x^2+2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2x^2e^{-x} + 4e^{-x} - 2x^3e^{-x} - 4xe^{-x} - 4x^2e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-2x^2e^{-x} - 2x^3e^{-x} - 4xe^{-x} + 4e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2e^{-x}(-x^3 - x^2 - 2x + 2)}{(x^2+2)^2}$

D'ou

$f'(x) = \dfrac{2g(x)\cdot e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

• les limites:

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2}\left(\dfrac{2x}{1+\frac{2}{x^2}}\right)$

$\begin{cases} \lim\limits_{-\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{-\infty} \dfrac{2x}{1+\frac{2}{x^2}} = \dfrac{2x}{1+0} = -\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$

Exo 2 (suite)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \cdot e^{-x}$

$\begin{cases} \lim_{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{+\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{+\infty} e^{-x} = \lim e^{x} = 0 \end{cases}$

d'où

$\lim_{+\infty} f(x) = 0 \times 0 = 0$

d'après ① ②

$f'(x) = \frac{2g(x) \cdot e^{-x}}{(x^2+1)^2}$

et donc $f'(x)$ a le même signe de $g(x)$ et d'après 1) c) $g(\alpha) = 0$ d'où le signe de $g(x)$ est

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

d'où le tableau de variat° de f est:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ 0

2) La courbe de f

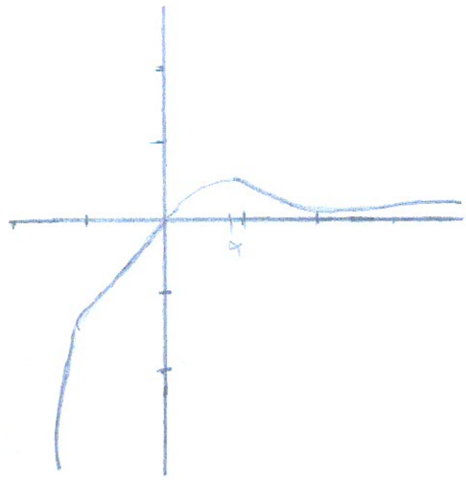
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ A.H
- $\lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{-\infty} \frac{2xe^{-x}}{x^2+2}$

$= \lim_{-\infty} \frac{xe^{-x}}{x^2}\left(\frac{2}{1+\frac{1}{x^2}}\right)$

$= +\infty$

donc C_f admet une B.P de direct° (oy)

la courbe



3) La suite (u_n) définie par $\forall n \geq 1$ $u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$

on a : pour $n \leq t \leq n+1 \Rightarrow$

or $n \geq 1 \Rightarrow (t-1)^2 \geq 0$

$\Rightarrow t^2 - 2t + 1 \geq 0 \Rightarrow t^2 + 1 \geq 2t > 0$

$t^2 + 2 \geq t^2 + 1 \geq 2t$

or $\boxed{0 \leq \frac{2t}{2+t^2} \leq 1}$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{2te^{-t}}{2+t^2} \leq e^{-t}$

$0 \leq \int_n^{n+1} \frac{2te^{-t}}{2+t} dt \leq \int_n^{n+1} e^{-t} dt$

$0 \leq u_n \leq [-e^{-t}]_n^{n+1}$

$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq e^{-n} - e^{-n-1}$

$0 \leq u_n \leq e^{-n}[1 - e^{-1}]$

$\boxed{0 \leq u_n \leq \left(1 - \frac{1}{e}\right)e^{-n}}$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = ?$ or $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{e}\right)e^{-n}$

$= \lim \left(1 - \frac{1}{e}\right) \times 0 = 0$

d'où d'après le T.G $\lim u_n = 0$

3)b) pour que $u_{n_0} \leq 10^{-5}$ alors

il suffit que $\left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n_0} \leq 10^{-5}$

$\Rightarrow e^{-n_0} \leq \frac{10^{-5}}{1 - \frac{1}{e}}$

d'où $-n_0 \leq \ln\left(\frac{10^{-5}}{1 - \frac{1}{e}}\right)$

$\Rightarrow n_0 \geq -\ln\left(\frac{10^{-5}}{1 - \frac{1}{e}}\right)$

$\Rightarrow n_0 \geq -\ln\left(\frac{1}{(1 - \frac{1}{e}) 10^{5}}\right)$

$n_0 \geq \ln\left((1 - \frac{1}{e}) \cdot 10^{5}\right)$

$\Rightarrow n_0 \geq \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) + \ln(10^{5})$

$\Rightarrow \boxed{n_0 \geq 12}$

d'où à partir $n_0 = 12$

on a : $\boxed{0 \leq u_n \leq 10^{-5}}$