Mohamed Lemine / Mohamed Moctar.

$\boxed{EX\,03}$ $\boxed{\text{Bac } 2015 \text{ N}}$

$f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

1) a) $D_f =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1.$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0.$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0.$

Interprétation graphique

- (C) admet une AH d'équation $y=1$ au voisinage de $(-\infty)$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

- (C) admet une AH d'équation $y=0$ au voisinage de $(+\infty)$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

b/ $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

c) $\begin{cases} f \text{ est continue et strictement décroissant sur } \mathbb{R} \\ f(\mathbb{R}) =]0,1[\end{cases}$

alors $f : \mathbb{R} \longmapsto]0,1[$ est bijective

$\delta =]0;1[$

on pose : $y = f(x)$

on a : $y = \frac{1}{1+e^x} \iff y(1+e^x) = 1$

$y + ye^x = 1 \implies ye^x = 1-y.$

$\implies e^x = \frac{1-y}{y} \iff x = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$

D'où $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$ $x \in]0$

2, a)

on a : $f(2a-x) + f(x) = 2b.$

$\implies \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{1}{1+e^x} = 1.$

D'où $\Omega\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est une centre de symétrie de la courbe (C

b/ les courbes (C) et (C') sont symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x.$

s'il se coupent en un point d'abscisse x, alors x vérifie $f(x) = x$, soit $f(x) - x = 0.$

on pose $V(x) = f(x) - x$

V est dérivable (Donc continue) sur $\mathbb{R}$, avec $V'(x) = f'(x) - 1$

$V'(x) = -\left(1 + \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)$

il est clair que pour tout x de $\mathbb{R}$ $V'(x) < 0$

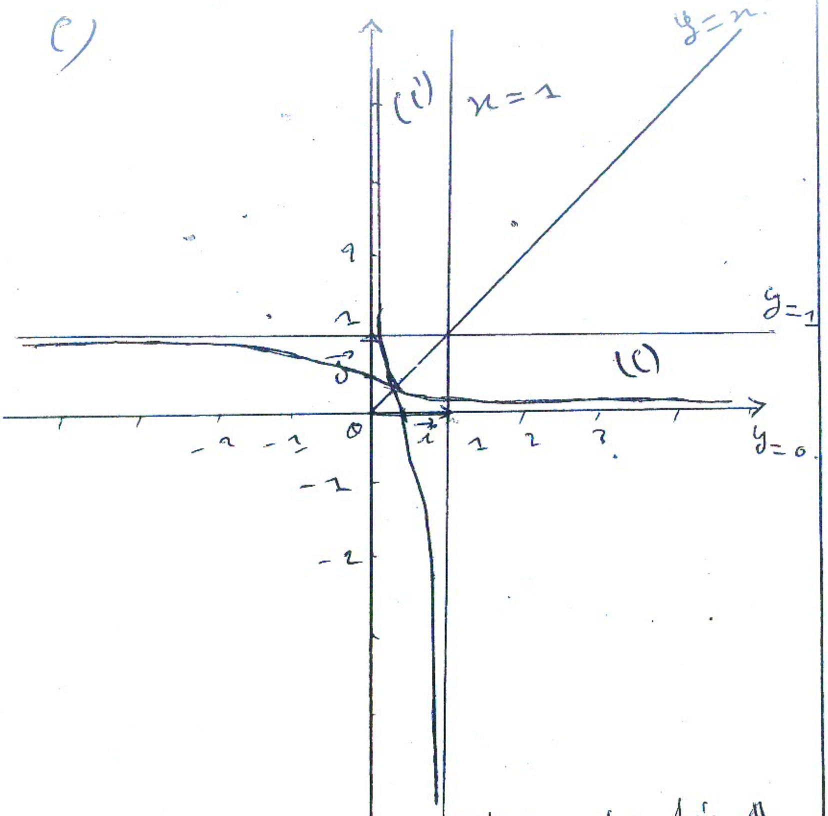
D'où V est strictement décroissant sur $\mathbb{R}$

on a ;

$\begin{cases} V(0,4) \simeq 1,3 \cdot 10^{-3} > 0 \\ V(0,5) \simeq -0,12 < 0 \end{cases}$

Donc $V(0,4) \cdot V(0,5) < 0$

D'après le théorème de valeurs intermédiaires, l'équation $V(x) = 0$ admet une solution α telle que $0,4 < \alpha < 0,5$ (V est continue sur [0,4 et change de signs). D'après le théorème de la bijection réciproque (V est continue et strict monotone c)



d) par symétrie, l'aire cherchée A est égale au double de l'aire comprise entre (C), la droite $y = x$. et les droites verticales d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$.

$$A = 2\int_0^\alpha (f(x) - x)\,dx.$$

$$A = 2\int_0^\alpha \left(\frac{1}{e^x+1} - x\right)dx.$$

$$= 2\int_0^\alpha \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} - x\right)dx.$$

$$= -2\int_0^\alpha \left(\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} + x\right)dx.$$

$$= -2\left[\ln(e^{-x}+1) + \frac{1}{2}x^2\right]_0^\alpha$$

$$= -2\left(\ln(e^{-\alpha}+1) + \frac{1}{2}\alpha^2 - \ln(2)\right)$$

$$\boxed{A = 2\ln(2) - 2\ln(e^{-\alpha}+1) - \alpha^2 \text{ u.a}}$$

3) on a $I_n = \int_0^\alpha f^n(t)\,dt$

a) $$I_1 = \int_0^\alpha \frac{1}{e^t+1}\,dt$$

$$I_1 = \int_0^\alpha \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt$$

$$I_1 = -\int_0^\alpha \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt$$

$$= \left[-\ln(1+e^{-t})\right]_0^\alpha$$

$$I_1 = -\ln(1+e^{-\alpha}) + \ln(2)$$

$$= -\ln\left(\frac{1+e^\alpha}{e^\alpha}\right) + \ln(2)$$

$$= \ln\left(\frac{e^\alpha}{1+e^\alpha}\right) + \ln(2)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{1+e^\alpha}\cdot e^\alpha\right) + \ln(2)$$

$$= \ln(\alpha e^\alpha) + \ln(2)$$

car $f(\alpha) = \alpha \Rightarrow \frac{1}{e^\alpha+1} = \alpha$

$$I_1 = \cancel{\alpha\ln(\alpha)} + \cancel{\ln(e)} + \cancel{\ln(2)}$$

$$= \ln(\alpha) + \ln(e^\alpha) + \ln(2)$$

$$\boxed{I_1 = \alpha + \ln(2\alpha)}$$

b) on a $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$

$$f^2(x) - f(x) = \frac{1}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{1+e^x}$$

$$= \frac{1}{(1+e^x)^2} - \frac{1+e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} = f'(x)$$

Donc $f'(x) = f^2(x) - f(x)$

c)

D'après b) on multiplient par $f^{n-1}(x)$ et par intégration de 0 à α :

$$\int_0^\alpha f'(x)\cdot f^{n-1}(x)dx = \int_0^\alpha f^{n+1}(x)dx - \int_0^\alpha f^n(x)dx.$$

$$\frac{1}{n}\int_0^\alpha n f'(x)\cdot f^{n-1}(x)dx = I_{n+1} - I_n$$

$$\left[\frac{1}{n} f^n(x)\right]_0^\alpha = I_{n+1} - I_n.$$

$$\frac{1}{n}\left(f^n(\alpha) - f^n(0)\right) = I_{n+1} - I_n.$$

$$\frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right) = I_{n+1} - I_n.$$

$$\boxed{I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)}$$

d) on a $\alpha > 0$ et pour tout entier naturel non nul n, f^n est continue et positive sur $[0, \alpha]$ alors $\int_0^\alpha f^n(t)dt \geq 0$ D'où $I_n \geq 0$

Donc I_n est positive

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 < \alpha \leq 0{,}5 \Rightarrow 0 < \alpha^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\alpha^n < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \alpha^n - \frac{1}{2^n} < 0$$

$$I_{n+1} - I_n < 0$$

D'où I_n est décroissante.

on en déduit que la suite I_n est convergente car décroissante et minorée par 0.

4.a

4.a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

on sait que f est décroissante sur $\mathbb{R}$ Donc $0 \leq t \leq \alpha$.

$$\Rightarrow f(\alpha) \leq f(t) \leq f(0)$$

$$\alpha \leq f(t) \leq \frac{1}{2}.$$

$$\alpha^n \leq f^n(t) \leq \frac{1}{2^n}.$$

$$\int_0^\alpha \alpha^n dt \leq I_n \leq \int_0^\alpha \frac{1}{2^n}$$

$$\boxed{\alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}.}$$

comme $0 < \alpha < 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha^{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0$

alors d'après le théorème de gendarme : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}$

b) on a pour $n > 0$

$$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$$

Donc :

pour $n = 1$ $\cancel{I_2} - I_1 = \frac{1}{1}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$

$$I_3 - \cancel{I_2} = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right)$$

$\vdots$

$$I_n - \cancel{I_{n-1}} = \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

on somme

$$I_n = I_1 + 1\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \dots + \frac{1}{n}\left(\alpha^n \dots\right)$$

$$\boxed{I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)}$$

$$\boxed{\lim_{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right) = -(\alpha + \ln 2\alpha)}$$

Fin.

V

Exo 2 Bac 2015 C

1) $P(z) = z^3 - (6+5i)z^2 + (1+20i)z + 14-5i$

a) $P(i) = 0$

	1	$-6-5i$	$1+20i$	$14-5i$
i		i	$4-6i$	$-14+5i$
	1	$-6-4i$	$5+14i$	0

$P(z) = (z-i)(z^2 - (6+4i)z + 5+4i)$

$z_0 = i$

$\Delta = -8i \Rightarrow \Delta = (\cancel{4}(1-i)^2)$

$\delta = 2-2i$

$z_1 = 2+3i$

$z_2 = 4+i$

$S\{i ; 2+3i ; 4+i\}$

2) a)

$z' = az + b$

(1) $z_A = az_A + b \Rightarrow i = ai + b$

(2) $z_B = az_B + b \Rightarrow 2+3i = (4+i)a + b$

$(2)-(1)$ $4a = 2+2i$

$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$z' = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

b) • le rapport $k = |\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i|$

$k = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• $\arg(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)$

$= \arg\frac{1}{2} + \arg(1+i)$

$= 0 + \arg(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})$

$= \frac{\pi}{4}$.

Donc $S(A, \frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

3) a)

$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \frac{z_1 - z_A}{z - z_B} =$ im pur

Donc $M \in \Gamma_1$ le cercle de diamètre AB privé A et B.

$\frac{z-z_A}{z-z_C} =$ im pur $M \in \Gamma_2$ le cercle de diamètre AC privé A et C.

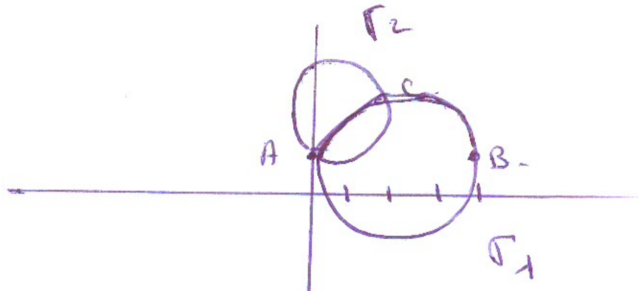
b) Justifier que $S(\Gamma_1) = S(\Gamma_2)$

$S(A) = A$ $S(B) = C$.

$\Gamma_1[AB] \xrightarrow{S} \Gamma[S(A)S(B)]$

$= \Gamma[AC]$

$= \Gamma_2$.



~~Mohamed~~ Lemine / Mohamed Moctar.

$\boxed{\text{EX04}}$ $\boxed{\text{Bac 2015 SC.}}$

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$ $\quad D_f =]-\infty, +\infty[$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} (x+1)e^{-x}$

$= -\infty \cdot +\infty = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \left(\dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x}\right)$

$= 0$

$f'(x) = \dfrac{e^x - e^x(x+1)}{e^{2x}} = \dfrac{1-x-1}{e^x}$

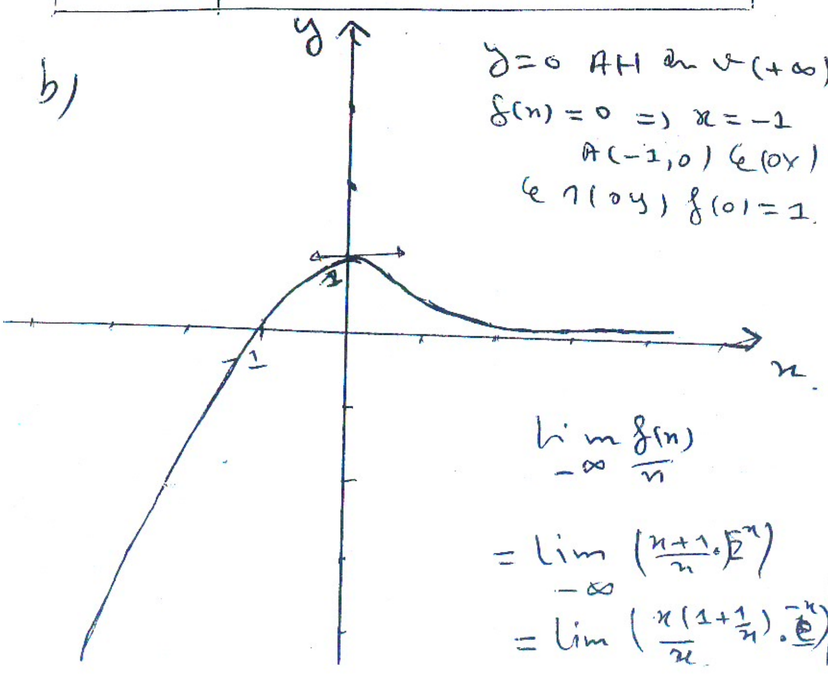
$= \dfrac{-(x+1)}{e^x} = \dfrac{1-x}{e^x} = \dfrac{-x}{e^x}$

$\boxed{f'(x) = -xe^{-x}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

b)



$y = 0$ AH au $v(+\infty)$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = -1$

$A(-1, 0) \in (ox)$

$\in \cap (oy)$ $f(0) = 1$.

$\lim\limits_{-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$= \lim\limits_{-\infty} \left(\dfrac{x+1}{x} \cdot e^{-x}\right)$

$= \lim \left(\dfrac{x(1+\frac{1}{x})}{x} \cdot e^{-x}\right)$

2)

$F_{n+1}(x) = \int_{-1}^{x} f_{n+1}(t) = \int_{-1}^{x} (1+t)^{n+1} \cdot e^{-t} dt$

utilison une integration par partie.

$\begin{cases} U = (1+t)^{n+1} \Rightarrow U' = (n+1)(1+t)^n \\ v' = e^{-t} \Rightarrow V = -e^{-t} \end{cases}$

Donc.

$F_{n+1}(x) = \left[-(1+t)^{n+1} \cdot e^{-t}\right]_{-1}^{x} - \int_{-1}^{x} -(n+1)(1+t)^n e^{-t}$

$= (n+1)\int_{-1}^{x} (1+t)^n e^{-t} - \left[(1+t)^{n+1} e^{-t}\right]_{-1}^{x}$

$\boxed{F_{n+1}(x) = (n+1) F_n(x) - f_{n+1}(x)}$

3) soit $I_n = F_n(0) = \int_{-1}^{0} f_n(t) dt$

a) de (2)

on a

$F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$

on prend $x = 0$

$F_{n+1}(0) = F_n(0)(n+1) - f_{n+1}(0)$

$\boxed{I_{n+1} = (n+1) I_n - 1}$

b)

on a $-1 \leq t \leq 0$.

$0 \leq t+1 \leq 1$.

$0 \leq (t+1)^{n+1} \leq (t+1)^n \leq 1$

$0 \leq (t+1)^{n+1} e^{-t} \leq (t+1)^n e^{-t}$

$0 \leq \int_{-1}^{0} (1+t)^{n+1} e^{-t} \leq \int_{-1}^{0} (1+t)^n e^{-t}$

$0 \leq U_{n+1} \leq U_n$

Donc U_n est décroissant et positi.

c) on a

$U_{n+1} \leq U_n$.

$(n+1) I_n - 1 \leq U_n$

d'$n I_n \leq 1 \Rightarrow \boxed{I_n \leq \dfrac{1}{n}}$

d'autre pour I_n positive

$0 \leq I_{n+1} \Rightarrow (n+1) I_n - 1 \geq 0$

$\boxed{I_n \geq \dfrac{1}{n+1}}$

Donc $\boxed{\dfrac{1}{} \leq I_n \leq \dfrac{1}{}}$

$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

4) $u_n = \frac{I_n}{n!}$

a) $\forall n \geq 1$

on a $I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$

$\Rightarrow \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1) I_n}{(n+1) n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

$$\boxed{u_{n+1} = u_n - \frac{1}{(n+1)!}}$$

on a $u_1 = \frac{I_1}{1!} = I_1 = \int_{-1}^{0} (1+t) e^{-t} dt$

$\begin{cases} u(t) = 1+t \Rightarrow u' = 1 \\ v'(t) = e^{-t} \Rightarrow v(t) = -e^{-t} \end{cases}$

$u_1 = \left[-(1+t) e^{-t}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -e^{-t} dt$

$= -1 + \left[e^{-t}\right]_{-1}^{0} = -1 + e - 1$

$$\boxed{u_1 = e - 2}$$

on a : $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{(n+1)!}$

Alors $\begin{cases} u_2 = u_1 - \frac{1}{2!} \\ u_3 = u_2 - \frac{1}{3!} \\ \vdots \\ u_n = u_{n-1} - \frac{1}{n!} \end{cases}$

par addition

$u_n = u_1 - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$

$u_n = e - 2 - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$

$= e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots + \frac{1}{n!}\right)$

$$\boxed{u_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}$$

b) on sait que

$\lim_{+\infty} u_n = \lim_{+\infty} \frac{I_n}{n!} = 0$

$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - u_n$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e}$$

Mohamed Lemine / Mohamed mostar.

EX 03 | Bac 2013 SC.

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2\ln x}{x^2 - \ln x} \; ; \quad x > 0 \\ f(0) = -2 \end{cases}$$

$D_f = [0, +\infty[$.

1/- a) M.q f est continue en 0^+.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{0^+} \frac{2\ln x}{\ln x\left(x^2 \times \frac{1}{\ln x} - 1\right)}$$

$$= \frac{2}{\left(0 \times \frac{1}{(-\infty)} - 1\right)} = \frac{2}{0-1} = -2 = f(0)$$

Donc f est continue en 0^+.

b/ $$\lim_{0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim \frac{\frac{2\ln x}{x^2 - \ln x} + 2}{x}$$

$$= \lim_{0^+} \frac{2x^{\cancel{2}}}{x^3 - \cancel{x}\ln x} = \lim_{0^+} \frac{2x}{x^2 - \ln x}$$

$$= 2 \times 0 \times \frac{1}{0 + \infty} = 0 \qquad f'_d(0) = 0$$

Donc f est derivable a droite zéro

C_f admet au point $(0, -2)$ une demit tangente Horizontale

c) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{2\ln x}{x^2} \times \frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x^2}}$$

$$= 2 \times 0 \times \frac{1}{1-0} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

la droite d'équation $y = 0$ est un asymptote. AH au $v(+\infty)$ de C_f.

IV

2/a) $$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(x^2 - \ln x) - 2\ln x(2x - \frac{1}{x})}{(x^2 - \ln x)^2}$$

$$= \frac{2x - \frac{2\ln x}{x} - 4x\ln x + \frac{2\ln x}{x}}{(x^2 - \ln x)^2}$$

$$= \frac{2x - 4x\ln x}{(x^2 - \ln x)^2} = \frac{2x(1 - 2\ln x)}{(x^2 - \ln x)^2}$$

si $\ln x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x \geq \sqrt{e}$

$f'(x) \leq 0$.

si $\ln x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x \leq \sqrt{e}$

$f'(x) \geq 0$

T.V

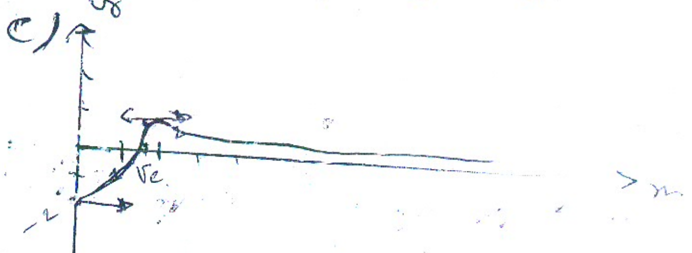
x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'		+		−	
f	-2	↗	$\frac{1}{e-1}$	↘	0

b) Equation de la tangente à C_f en $x_0 = 1$

$y = f'(1)(x-1) + f(1) =$

$y = 2(x-1) + 0 = 2x - 2$

c)



3)

$$U_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt \qquad n \geq 1$$

$n \leq t \leq n+1$

$n \geq 1 \qquad (t-1)^2 \geq 0$

$t^2 - 2t + 1 \geq 0$

$t^2 + 1 \geq 2t > 0$

$t^2 + 2 > t^2 + 1$

$\Rightarrow t^2 + 2 > 2t > 0$

d'où $0 \leq \cancel{2t} \; t^2 + 2$

$$0 \leq \frac{2t}{t^2+2} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{2te^{-t}}{t^2+2} \leq e^{-t}$$

$$0 \leq U_n \leq \int_n^{n+1} e^{-t}\,dt$$

$$0 \leq U_n \leq \left[-e^{-t}\right]_n^{n+1}$$

$$0 \leq U_n \leq e^{-n} - e^{-n-1}$$

$$0 \leq U_n \leq e^{-n}(1 - e^{-1})$$

$$\boxed{0 \leq U_n \leq \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

car $\lim_{+\infty} \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n} = 0$.

b) $0 \leq U_n \leq \left(1 - \frac{1}{e}\right)e^{-n}$.

Soit $0 \leq U_n \leq 10^{-5}$.

$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{e}\right)e^{-n_0} \leq 10^{-5}$

$$e^{-n} \leq \frac{10^{-5}}{1 - \frac{1}{e}}$$

$$-n \leq \ln \frac{10^{-5}}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)}$$

$n \geq \ln\left(\left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot 10^5\right)$

$n \geq \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) + \ln 10^5 \Rightarrow n \geq 12$

Donc $\boxed{n_0 = 12}$

mohamed Lemine/mohamed moctar.

$\boxed{\text{Exo2}}$ $\boxed{2011\ C}$

1) $g(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2.$

$D_g =]-\infty, +\infty[.$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

$g'(x) = -3x^2 - 2x - 2.$

$\Delta = 4 - 24 = -20 < 0.$

D'où $g'(x) < 0.$

T.V

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

b) g est continue et strictement monotone, donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

c) comme g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. donc l'equation $g(x) = 0$ admet une seule solution (α)

on a : $g(0,6) > 0$

$g(0,7) < 0$

D'où $0,6 < \alpha \leq 0,7$

2) $f(x) = \dfrac{2xe^{-x}}{x^2+2}$ $D_f =]-\infty, +\infty[$

a) $f'(x) = \dfrac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{e^{-x}}{-x} \times \dfrac{-2}{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

car $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{e^{-x}}{-x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$

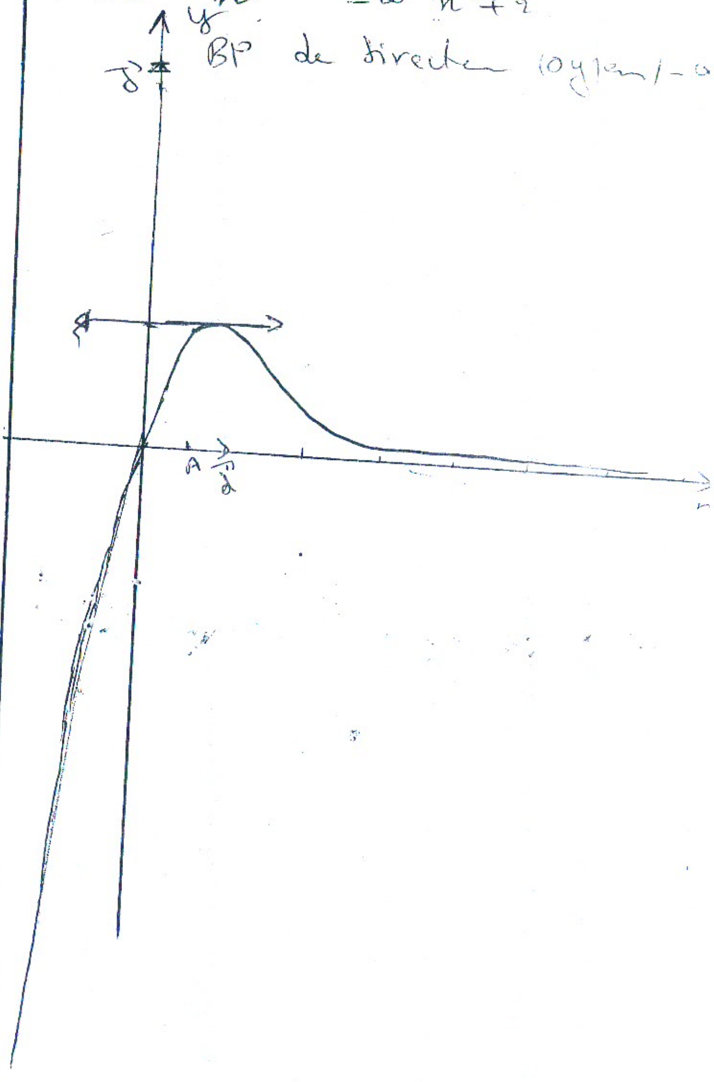
et

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

c) $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{2e^{-x}}{x^2+2} = +\infty$

BP de direction (Oy) en $-\infty$



3) a) La fonction $t \mapsto t f(t)$ est continue sur $[1, +\infty[$ car elle est le produit des fonction continus. donc elle admet une primitive "H" alors.

alors $F(x) = H(x) - H(1)$

Donc F est dérivable car (somme des fonction dérivable)

et $F'(x) = H'(x) = x \cdot f(x)$

$$F'(x) = \frac{2x\ln x}{x^2 - \ln x}.$$

mais pour $x \geq 1$ on a.

$f(x) \geq 0 \Rightarrow x f(x) \geq 0$

alors $F'(x) = x f(x) \geq 0$

donc F est croissante.

b) pour $t \geq 1$

$$g(t) - \frac{2\ln(t)}{t} = \frac{2t\ln(t)}{t^2 - \ln t} - \frac{2\ln t}{t}$$

$$= \frac{2t^2\ln t - \cancel{2t^2\ln t} + 2\ln^2 t}{t(t^2 - \ln t)}$$

$$= \frac{2\ln^2(t)}{t(t^2 - \ln t)} = \frac{2\ln(t)}{t^2 - \ln t} \times \frac{\ln t}{t}$$

$$= \frac{\ln t}{t} \times f(t) \geq 0$$

car $\frac{\ln t}{t} \geq 0 \quad \forall t \geq 1$

$f(t) \geq 0.$

Donc $\boxed{g(t) \geq \frac{2\ln(t)}{t}}$

$\Rightarrow$ alor $t g(t) \geq 2\ln(t)$

$$F(x) = \int_1^x g(t)\,dt \geq 2\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}$$

$$F(x) \geq 2\left[\tfrac{1}{2}\ln^2(t)\right]_1^x$$

$$F(x) \geq (\ln x)^2$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) \geq \lim_{x \to +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty}$$

c)

x	1	$+\infty$
$F'(x)$	$+$	
$F(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$