http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Exo(5) :

Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{1+\tan^{2012} x}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ f(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

1°) Montrer que f est continue, positive, décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2°) Montrer que pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$ on a : $f(\frac{\pi}{2} - x) + f(x) = 1$.

3°) Interpréter graphiquement le resultat précèdent. En deduire que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$$

Solution :

1°)

On a : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^{\pm}} f(x) = \lim\limits_{\frac{\pi}{2}^{\pm}} \dfrac{1}{1+\tan^{2012} x} = \dfrac{1}{1+(\pm\infty)^{2012}} = \dfrac{1}{\pm\infty} = 0 = f(\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow f$ est continue en $\frac{\pi}{2}$

- $x \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq \sin x \leq 1$

$0 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow \tan x \geq 0$

$\Rightarrow \tan^{2012} x \geq 0 \Rightarrow 1 + \tan^{2012} x \geq 0 = \dfrac{1}{1+\tan^{2012} x} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

- $f'(x) = \dfrac{-(1+\tan^{2012} x)'}{(1+\tan^{2012} x)^2} = \dfrac{-(2012\tan^{2011} x(1+\tan^2 x))}{(1+\tan^{2012} x)^2}$

$$f'(x) = \frac{-2012\tan^{2011} x - 2012\tan^{2013} x)}{(1+\tan^{2012} x)^2} \leq 0$$

$\Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

2°) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(\frac{\pi}{2} - x) + f(x) = 1$.

$f(\frac{\pi}{2} - x) = \dfrac{1}{1+\tan^{2012}(\frac{\pi}{2} - x)} = \dfrac{1}{1+\cot an^{2012} x}$

$f(\frac{\pi}{2} - x) + f(x) = \dfrac{1}{1+\cot an^{2011} x} + \dfrac{1}{1+\tan^{2012} x} = \dfrac{1+\tan^{2012} x + 1 + \cot an^{2012} x}{(1+\cot an^{2012} x)(1+\tan^{2012} x)}$

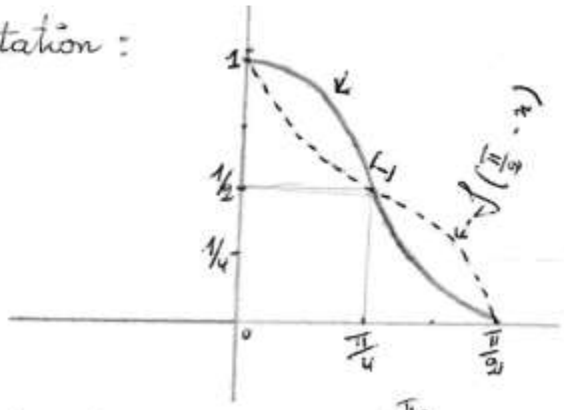
$$\boxed{1+\tan^{2012} x = \frac{1}{\cos^{2012} x} \;;\; 1+\cot an^{2012} x = \frac{1}{\sin^{2012} x}}$$

$\Rightarrow f(\frac{\pi}{2} - x) + f(x) = \dfrac{\dfrac{\sin^{2012} x + \cos^{2012} x}{\sin^{2012} x \cdot \cos^{2012} x}}{\dfrac{1}{\sin^{2012} x \cdot \cos^{2012} x}} = 1$

$\boxed{f(\frac{\pi}{2} - x) + f(x = 1}$ $\Rightarrow$ le pt $I(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$ est un centre de symetrie de C_f.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

3°) Interprétation :



on a : $f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=1 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)\,dx=[x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x))\,dx=\frac{\pi}{2}$ or $I(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2})$ est un centre de symetrie de $\mathcal{C}_f$ donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2}-x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x))\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

donc : $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\frac{\pi}{4}}$

Exo (6) :

Pour tout entier naturel n on pose : $U_n=\int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^2}$

1°) Prouver que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (U_n).

2°) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et positive. En deduire qu'elle est convergente

3°) Montrer que : $\lim_{n\to\infty} U_n=0$.

Solution :

$U_n=\int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^2}$

1°) La fonction $(t\to\frac{t^n}{1+t^2})$ est rationnelle et continue sur $[0,1]$ pour tout n,

Alors, l'integrale U_n existe D'où l'écriture définie bien une suite numerique

2°) $0\leq t\leq 1 \Rightarrow 0\leq t^{n+1}\leq t^n \Rightarrow 0\leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2}\leq \int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\,dt$, ...

$0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \ \forall n$

Alors : Un est decroissante et posotive.

Donc : minorée (par 0) et ↙ ⇒ elle est un convergente.

3) $0 \leqslant t \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant t^2 \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant 1+t^2 \leqslant 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}t^n \leqslant \frac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$

$\int_0^1 \frac{1}{2}t^n dt \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \leqslant \int_0^1 t^n dt$

$\left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1 \leqslant U_n \leqslant \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1$

$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{n+1}$

Théorème de gendarme $\Rightarrow \boxed{\lim_{\infty} U_n = 0}$

Exo(8) :

on pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, dx$

1°) Calculer $I + J$

2°) En utilisant une intégration par parties, Calculer $I - J$

3°) En deduire I et J.

Solution :

1°) $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin^2 x + \cos^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin^2 x + \cos^2 x) dx$

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0^2\right)$

$\boxed{I + J = \frac{\pi^2}{8}}$

2°) on a : $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin^2 x - x \cos^2 x) dx$

$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(x \cos 2x) dx$

- on utilise une integration par parties :

on Pose : $\begin{cases} u(x) = -x \\ v'(x) = \cos 2x \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$

Comme $\int uv' = uv - \int u'v$

$I - J = \left[-x \times \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} \sin 2x\right) dx$

$I - J = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x) dx = \left[-\frac{1}{4} \cos \pi + \frac{1}{4} \cos 0 \right]$

$I - J = \frac{1}{2}$

3°) on resout le système : $\begin{cases} I + J = \frac{\pi^2}{8} \\ I - J = \frac{1}{2} \end{cases}$

- Par addition : $2I = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi^2 + 4}{16}$
- Par soustraction : $2J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \Rightarrow J = \frac{\pi^2 - 4}{16}$

Fin