Baccalauréat
2015
Session Normale

Mexi Dahane
1003
79

Correction :

Exo 1 :

1) $P(z) = z^3 - (11+6i)z^2 + (28+38i)z - 12 - 60i$

z est un nombre complexe.

1) Pour calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$ on peut utiliser la division euclidienne ; une identification ou le Tableau d'horner :

	1	$-11-6i$	$28+38i$	$-12-60i$
3	↓	3	$-24-18i$	$12+60i$
	1	$-8-6i$	$4+20i$	0

$P(3) = 0$

$P(z) = (z-3)(z^2 + (-8-6i)z + 4 + 20i)$

$$\begin{cases} a = -8-6i \\ b = 4+20i \end{cases}$$

Suite Exo1 ;

b)
$$\begin{cases} Z-3=0 \quad \text{ou } Z=3 \\ (Z^2-(8+6i)Z+4+20i)=0 \end{cases}$$

$D = (-8-6i)^2 - 4(4+20i)$

$= 64-36+96i-16-80i$

$\boxed{D = 12+16i} = (4+2i)^2$

$\boxed{\delta = (4+2i)}$

$$Z_1 = \frac{8+6i+4+2i}{2}$$

$\boxed{Z_1 = 6+4i}$

$$Z_2 = \frac{8+6i-4-2i}{2}$$

$\boxed{Z_2 = 2+2i}$

$S = \{3 ; 6+4i ; 2+2i\}$

c) $Im(Z_A) < Im(Z_B) < Im(Z_C)$

Donc :

$$\begin{cases} Z_A = 3 \\ Z_B = 2+2i \\ Z_C = 6+4i \end{cases}$$

$G = bar$

A	B	C
2	-2	2

$$Z_G = \frac{2Z_A - 2Z_B + 2Z_C}{2-2+2}$$

$$Z_G = \frac{2(3) - 2(2+2i) + 2(6+4i)}{2}$$

$\boxed{Z_G = 7+2i}$

2) $\vec{MM'} = 2\vec{MA} - 2\vec{MB} + (3-k)\vec{MC}$

a) L'application f_k est une translation ssi le vecteur $\vec{MM'}$ est constant.

$\vec{MM'} = \vec{u}$

$\vec{u} = 2\vec{MA} - 2\vec{MB} + (3-K)\vec{MC}$

$\Rightarrow 2-2+3-K=0$

$\Rightarrow K=3$

f_3 est une translation de vecteur $\vec{u}$.

$\vec{u} = 2\vec{MA} - 2\vec{MB}$

$\vec{u} = 2\vec{MA} + 2\vec{BM}$

$\vec{u} = 2(\vec{MA} + \vec{BM})$

$\vec{u} = 2(\vec{BM} + \vec{MA})$

$\boxed{\vec{u} = 2\vec{BA}}$

$f_3 = t_{2\vec{BA}}$

Suite Exo1 :

b) $K \in \mathbb{R} \setminus \{2;3\}$

On pose

$\Omega_K = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 2 & -2 & 3-K \end{array}$

$\vec{MM'} = (3-K)\vec{M\Omega_K}$

M est un point invariant

$M' = M$

$\Rightarrow \vec{MM'} = \vec{0}$

$(3-K)\vec{M\Omega_K} = \vec{0}$

$\vec{M\Omega_K} = \vec{0}$

$\boxed{M = \Omega_K}$

Ω_K est le seul point invariant

On a :

$\vec{MM'} = (3-K)\vec{M\Omega_K}$

$\vec{M\Omega_K} + \vec{M'\Omega_K} = (3-K)\vec{M\Omega_K}$

$\vec{\Omega_K M'} = (3-K)\vec{M\Omega_K} - \vec{M\Omega_K}$

$= (3-K-1)\vec{M\Omega_K}$

$\vec{\Omega_K M'} = (2-K)\vec{M\Omega_K}$

$= (K-2)\vec{\Omega_K M}$

$\Rightarrow f_K$ est une homothétie de centre Ω_K et de rapport $K-2$

$f_K = h(\Omega_K ; K-2)$

$\Omega_K = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 2 & -2 & 3-K \end{array}$

$\vec{C\Omega_K} = \frac{2}{3-K}\vec{CA}$

$-\frac{2}{3-K}\vec{CB}$

$= \frac{2}{3-K}(\vec{CA} - \vec{CB})$

$= \frac{2}{3-K}(\vec{BC} + \vec{CA})$

$\vec{C\Omega_K} = \frac{2}{3-K}\vec{BA}$

Ω_K décrit la droite // (AB) passant par C.

$\vec{\Omega M'} = K\vec{\Omega M}$

$h(\Omega ; K)$

$t_{\vec{u}} : \vec{MM'} = \vec{u}$

$\Omega_1 = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 2 & -2 & 2 \end{array} = G$

d) $K = 1$; $\Omega_1 = G$

$f_1 = h(G ; -1) = S_G$

$R = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$

M décrit de $\Gamma(G ; GC)$

Suite EX01 :

$M \xmapsto{h} M'$

$\overrightarrow{GM'} = -\overrightarrow{GM}$

$\overrightarrow{GM'} + \overrightarrow{GM} = \vec{0}$

$G = \text{bar} \begin{array}{c|c} M' & M \\ \hline 1 & 1 \end{array}$

$R = \text{bar} \begin{array}{c|c} A & G \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

$\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$

3) $\varphi(M) = 2MA^2 - 2MB^2 + 2MC^2$

a) $2MA^2 - 2MB^2 + 2MC^2 = m$

$2MG^2 + \varphi(G) = m$

$\varphi(G) = 2GA^2 - 2GB^2 + 2GC^2$

$GA^2 = |z_A - z_G|^2 = |3 - 7 - 2i|^2$

$|-4-2i|^2$

$GA^2 = 16 + 4 = 20$

$GB^2 = |z_B - z_G|^2 = |2 + 2i - 7 - 2i|^2$

$|-5|^2 = 25$

$GC^2 = |z_C - z_G|^2 = |6 + 4i - 7 - 2i|^2$

$= |-1 + 2i|^2 = 5$

Fin

$\varphi(G) = 40 - 50 + 10 = 0$

$2MG^2 = m$

$MG^2 = \frac{m}{2}$

si $m > 0$

Γ_m ; $\mathscr{C}(G; \sqrt{\frac{m}{2}})$

si $m = 0$

$\Gamma_0 = \{G\}$

si $m < 0$

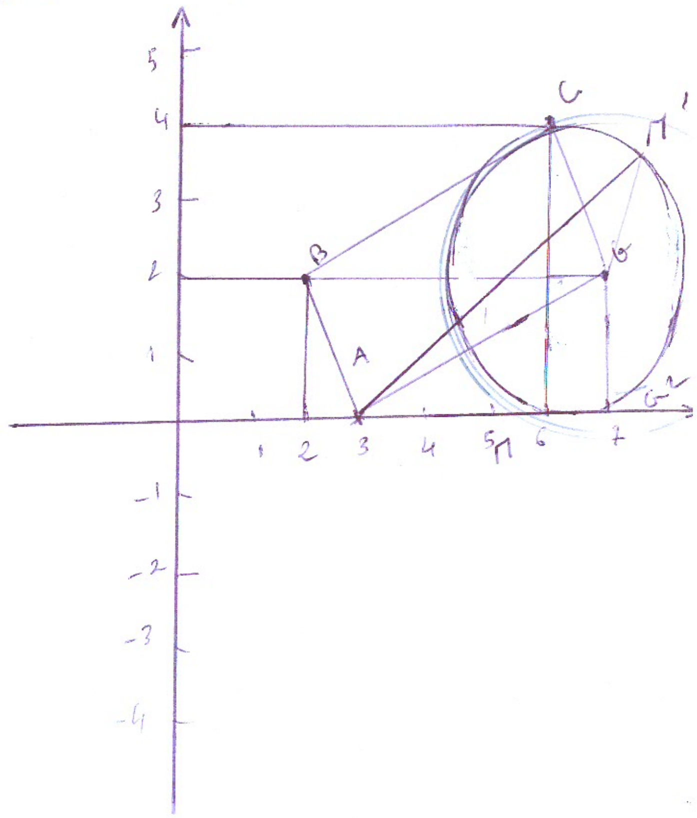
$\Gamma_m = \varnothing$

$\boxed{m = 10}$

$MG^2 = 5$

$\Gamma_{10} = \mathscr{C}(G; \sqrt{5})$

b) Construction :



$GC^2 = 5 \iff GC = \sqrt{5}$ $\quad \Gamma_{10} = \mathscr{C}(G; GC)$

Exo2 :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

1) a) $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} \frac{1}{1+\underbrace{e^x}_{0}} = 1$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{1+\underbrace{e^x}_{+\infty}} = 0$

Interprétation graphique :

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = 1$ A.H d'équation $\boxed{y=1}$ au voisinage de $(-\infty)$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$ A.H d'équation $\boxed{y=0}$ au voisinage de $(+\infty)$

b) $\boxed{f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} < 0}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

$\begin{cases} f \text{ est continue} \\ \text{et strictement } (\searrow) \text{ sur } \mathbb{R} \\ f(\mathbb{R}) =]0;1[\end{cases}$

lors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J =]0;1[$

Pour exprimer $f^{-1}(x)$; on pose :

$$y = f(x)$$

On $y = \frac{1}{1+e^x} \Leftrightarrow y(1+e^x) = 1$

$\Leftrightarrow y + ye^x = 1$

$ye^x = 1-y \Leftrightarrow e^x = \frac{1-y}{y}$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$

D'où $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$

2) a) $f(2a-x) + f(x) = 2b$

avec $(a;b) = (0;\frac{1}{2})$

On a:

$f(2a-x) = f(-x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x}$

$= \frac{e^x}{e^x+1}$

Donc : $f(2a-x) + f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{1}{1+e^x}$

$f(2a-x) + f(x) = \frac{e^x+1}{e^x+1} = 1 = 2 \times \frac{1}{2} = 2b$

D'où $\Omega(0;\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe (C).

b) les courbes (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

Suite EX 3 :

s'il se coupent en un point d'abscisse x ; alors x verifie

$f(x) = x$

soit $f(x) - x = 0$

On pose :

$$u(x) = \frac{1}{1+e^x} - x$$

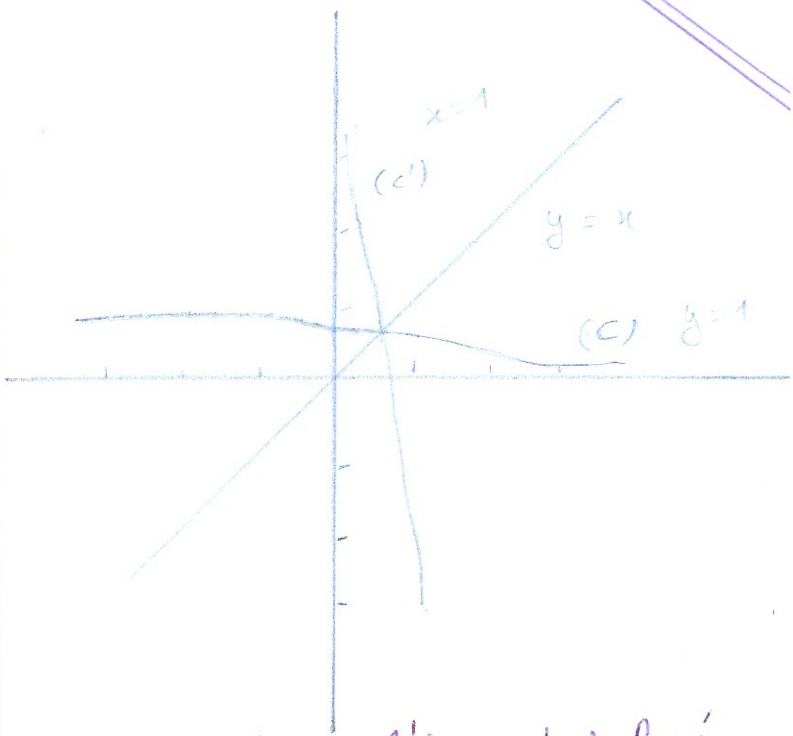
$$u(0,4) = \frac{1}{1+e^{0,4}} - 0,4 = 1,3 > 0$$

$$u(0,5) = \frac{1}{1+e^{0,5}} - 0,5 = -0,12 < 0$$

Donc $u(0,4) \times u(0,5) < 0$

d'aprés TVI l'equation $u(x) = 0$ admet une solution α telle que

$$0,4 < \alpha < 0,5$$



d) Par Symetrie, l'aire cherché A est égale au double de l'aire comprise entre (C), la droite $y = x$ et les droites verticales d'equations $x = \alpha$ et $x = 0$ (l'axe oy)

$$\mathcal{A} = 2\int_0^\alpha (f(x) - x)\,dx$$

$$= 2\int_0^\alpha \left(\frac{1}{e^x+1} - x\right) dx$$

$$= 2\int_0^\alpha \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} - x\right) dx$$

$$\Rightarrow \quad = -2\int_0^\alpha \left(\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} + x\right) dx$$

$$= -2\left[-\ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{2}x^2\right]_0^\alpha$$

$$= 2\left[\ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{2}x^2\right]_0^\alpha$$

$$= 2\left(\ln(1+e^{-\alpha}) - \frac{1}{2}\alpha^2 - \ln 2\right)$$

Suite Exo3 :

$$\mathcal{A} = 2\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{2e^{\alpha}}\right) - \alpha^2$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 2\ln\left(\frac{1+e^{\alpha}}{2e^{\alpha}}\right) - \alpha^2 \text{ en unité d'aire}}$$

3) $I_n = \int_0^{\alpha} f^n(t)\,dt$

a) $I_1 = \int_0^{\alpha} f(t)\,dt$

$$I_1 = \int_0^{\alpha} \frac{1}{e^t+1}\,dt$$

$$I_1 = \int_0^{\alpha} \frac{1}{e^t+1} \times \frac{e^{-t}}{e^{-t}}\,dt$$

$$I_1 = -\int_0^{\alpha} \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt$$

$$I_1 = \left[-\ln(1+e^{-t})\right]_0^{\alpha}$$

$$I_1 = -\ln(1+e^{-\alpha}) + \ln 2$$

$$I_1 = -\ln\left(\frac{e^{\alpha}+1}{e^{\alpha}}\right) + \ln 2$$

$$I_1 = \ln\left(\frac{1}{e^{\alpha}+1}e^{\alpha}\right) + \ln 2$$

$I_1 = \ln(\alpha e^{\alpha}) + \ln 2$ car

$$f(\alpha) = \alpha = \frac{1}{e^{\alpha}+1} = \alpha$$

$$I_1 = \ln(\alpha e^{\alpha}) + \ln 2$$

$$I_1 = \ln(\alpha) + \ln e^{\alpha} + \ln 2$$

$$\boxed{I_1 = \alpha + \ln(2\alpha)}$$

3) a) On a :

$$f'(x) = \frac{-e^{x}}{(1+e^{-x})^2}$$

$$f^2(x) - f(x) = \frac{1}{(1+e^{x})^2} - \frac{1}{1+e^{x}} \times \frac{1+e^{x}}{1+e^{x}}$$

$$= \frac{1}{(1+e^{x})^2} - \frac{1+e^{x}}{(1+e^{x})^2}$$

$$= \frac{-e^{x}}{(1+e^{x})^2} = f'(x)$$

Donc : $f'(x) = f^2(x) - f(x)$

c) D'après b) en multipliant par $f^{n-1}(x)$ On a :

$$f'(x)f^{n-1}(x) = f^{n+1}(x) - f^n(x)$$

Par intégration de 0 à α :

$$\int_0^{\alpha} f'(x)f^{n-1}(x)\,dx = \int_0^{\alpha} f^{n+1}(x)\,dx - \int_0^{\alpha} f^n(x)\,dx$$

$$\left[\frac{1}{n}f^n(x)\right]_0^{\alpha} = I_{n+1} - I_n$$

Suite Exo3 :

$$\frac{1}{n}\left(f^n(\alpha)-f^n(0)\right)=I_{n+1}-I_n$$

$$\frac{1}{n}\left(\alpha^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=I_{n+1}-I_n$$

$$\boxed{I_{n+1}-I_n=\frac{1}{n}\left(\alpha^n-\frac{1}{2^n}\right)}$$

d) On a $\alpha>0$ et pour entier naturel non nul n ; f^n est continue et positive sur $[0;\alpha]$.

Alors $\int_0^\alpha f^n(t)\,dt\geq 0$; D'où $I_n\geq 0$.

Donc (I_n) est positive

D'autre part, pour tout entier non nul n on a :

$$0<\alpha<0{,}5$$

$$0<\alpha^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\alpha^n<\frac{1}{2^n}$$

$$\alpha^n-\frac{1}{2^n}<0$$

$$I_{n+1}-I_n<0$$

D'ou (I_n) est décroissante

On en déduit que la suite (I_n) est convergente, car décroissante et minorée

4. a) On sait que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Donc, si $0\leq t\leq\alpha$

On a : $f(\alpha)\leq f(t)\leq f(0)$

donc

$$\alpha\leq f(t)\leq\frac{1}{2}$$

$$\alpha>0\Rightarrow 0\leq\alpha^n\leq f^n(t)\leq\frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow\int_0^\alpha\alpha^n\,dt\leq\int_0^\alpha f^n(t)\,dt\leq\int_0^\alpha\frac{1}{2^n}\,dt$$

$$\alpha^n[t]_0^\alpha\leq I_n\leq\frac{1}{2^n}[t]_0^\alpha$$

$$\alpha^n(\alpha-0)\leq I_n\leq\frac{1}{2^n}(\alpha-0)$$

$$\alpha^{n+1}\leq I_n\leq\frac{\alpha}{2^n}$$

Comme $0<\alpha<1$

On a $\lim\limits_{+\infty}\alpha^{n+1}=0$

On a aussi $\lim\limits_{+\infty}\frac{\alpha}{2^n}=0$

alors d'après TG

$$\boxed{\lim_{+\infty}I_n=0}$$

Suite Exo3 :

b) On a pour tout $n > 0$

$$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$$

Donc

pour $n=1$: $I_2 - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$

Pour $n=2$; $I_3 - I_2 = \left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right)$

Pour $n=3$; $I_4 - I_3 = \frac{1}{3}\left(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}\right)$

$\vdots \qquad \vdots$

Pour $n-1$: $I_n - I_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$$I_n - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3}\left(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$I_n = I_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$$

$$I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$$

On peut écrire ;

$$I_n - (\alpha + \ln(2\alpha)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$$

Par passage aux limites :

$$\lim_{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right) = \lim_{+\infty} I_n - \lim_{n\mapsto+\infty} (\alpha + \ln(2(\alpha)))$$

Comme $\lim_{n\mapsto+\infty} I_n = 0$

et $\lim_{n\mapsto+\infty} (\alpha + \ln(2\alpha)) = \alpha + \ln(2\alpha)$

Car indépendant de n ; on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right) = -(\alpha + \ln(2\alpha))$$

Fin

Solution EXO4 :

1)a) Pour la transformation d'écriture de $g(x)$; on factorise le dénominateur et le numérateur :

On factorise le dénominateur par x :

$$x^3 - 4x^2 + 5x = x(x^2 - 4x + 5)$$

Pour factoriser le numérateur on peut utiliser la division euclidienne, l'identification ou le table d'Horner :

	3	-12	19	-10
1	↓	3	-9	10
	3	-9	10	0

$\Rightarrow 3x^3 - 12x^2 + 19x - 10 = (x-1)(3x^2 - 9x + 10)$

$\Rightarrow g(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2 - 9x + 10)}{x(x^2 - 4x + 5)}$

Alors : $\begin{cases} a = 3 \\ b = -9 \\ c = 10 \end{cases}$

b) $3x^2 - 9x + 10$ et

$\Delta_1 = -39$

$x^2 - 4x + 5$

$\Delta_2 = -4$

les coefficients de x^2 sont positifs donc pour tout x de $\mathbb{R}^*$:

$3x^2 - 9x + 10 > 0$

$x^2 - 4x + 5 > 0$

D'où le signe de $(g(x))$ est celui de $\dfrac{x-1}{x}$

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
x	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x-1}{x}$	$+$	$-$	$+$
$g(x)$	$+$	$-$	$+$

2)a)

$\lim\limits_{0} (3x - 3) = -3$

$\lim\limits_{0} \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{0} \ln\left(\dfrac{x^2 - 4x + 5}{x^2}\right) = +\infty$

alors : $\lim\limits_{0} f(x) = +\infty$

(C) admet une A.V $\boxed{x = 0}$

b) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x^2} = 1$

$\lim\limits_{\pm\infty} \ln\left(\dfrac{x^2 - 4x + 5}{x^2}\right) = 0$

Suite Ex 04 :

Donc $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{\pm\infty} (3x-3)$

D'où $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$

c) D'après a) la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation

$$x = 0$$

De plus $\lim\limits_{\mp\infty} (f(x) - (3x-3)) =$

$$\lim_{\pm\infty} \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right) = 0$$

donc la courbe (C) admet une Asymptote oblique D d'équation

$$y = 3x - 3$$

PR On étudie le signe de

$d(x) = f(x) - y = f(x) - (3x-3)$

$$d(x) = \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)$$

On rappelle que le signe de $\ln t$ est celui de $t-1$ pour tout $t>0$

alors le signe de :

$d(x) = \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)$ est celui

de $\frac{x^2-4x+5}{x^2} - 1$

Par réduction au même dénominateur :

$$\frac{x^2-4x+5}{x^2} - 1 = \frac{x^2-4x+5-x^2}{x^2}$$

$$= \frac{-4x+5}{x^2}$$

Donc le signe de $d(x)$ est celui de :

$-4x+5$ car $x^2 > 0$

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$-4x+5$		$+$	|	$+$	|	$-$	
$d(x)$		$+$	||	$+$	|	$-$	
P.R		$\mathscr{C}/D$		$\mathscr{C}/D$		$D/\mathscr{C}$	

Pour $x = \frac{5}{4}$ on a $y = 3 \times \frac{5}{4} - 3$

$$= \frac{3}{4}$$

Alors l'asymptote D coupe la courbe (C) au point $\left(\frac{5}{4} ; \frac{3}{4}\right)$

3) a) On peut écrire $f(x) = 3x - 3 + \ln(x^2-4x+5) - \ln(x^2)$

$f(x) = 3x - 3 + \ln(x^2-4x+5) - 2\ln x$

donc :

$$f'(x) = 3 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = 3 + \frac{(2x-4)x - 2(x^2-4x+5)}{x(x^2-4x+5)}$$

Suite Exo4:

$$f'(x) = \frac{3(x^3-4x^2+5x)+2x^2-4x-2x^2+8x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3-12x^2+15x+4x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3-12x^2+19x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

Enfin $f'(x) = g(x)$

T.V:

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	|	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\ln 2$	↗	$+\infty$

b)* Sur $]0;+\infty[$ $f(x) \geq \ln 2 > 0$

Donc l'equation $f(x)=0$ n'admet pas de solution dans cet intervalle.

Sur $]-\infty;0[$ la restriction de f est Continue. Strictement monotone et change de signe car $0 \in f(]-\infty;0[)$
$=]-\infty;+\infty[$

Donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans cet intervalle

alors l'equation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}^*$

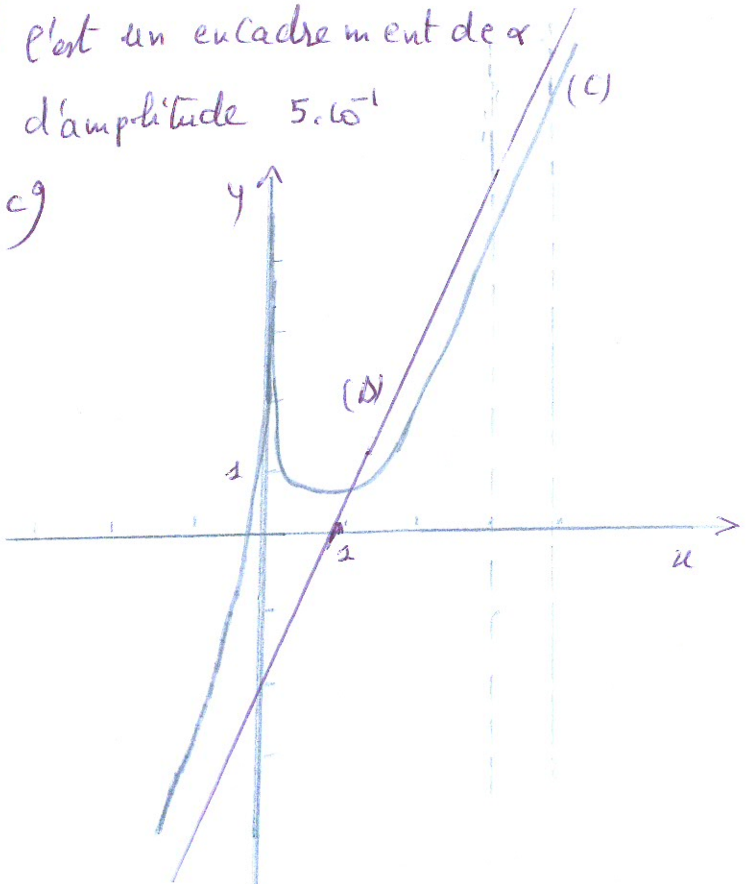
Pour encadrer α: $\begin{cases} f(-1) = -6+\ln(10) < 0 \\ \lim\limits_{0} f(x) = +\infty \end{cases}$

$\Rightarrow -1 < \alpha < 0$

$\begin{cases} f(-0,5) = -4,5+\ln 29 < 0 \\ \lim\limits_{0} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow -0,5 < \alpha < 0$

C'est un encadrement de α d'amplitude 5.10^{-1}

c)



Suite Ex04:

4) a) On a:

$$2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+(x-2)^2}\right)$$

$$=2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+x^2-4x+4}\right)$$

$$=2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{x^2-4x+5}\right)$$

$$=2\left(1+\frac{2x-4-1}{x^2-4x+5}\right)$$

$$=2\left(\frac{x^2-4x+5+2x-5}{x^2-4x+5}\right)$$

$$=2\left(\frac{x^2-2x}{x^2-4x+5}\right)$$

$$=\frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}$$

Alors: $\dfrac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}$

$$=2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+(x-2)^2}\right)$$

b) $$A=\int_3^{2+\sqrt{3}}\frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx$$

$$=\left[\ln|x^2-4x+5|\right]_3^{2+\sqrt{3}}$$

car: $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$

Donc:

$$A=\ln|(2+\sqrt{3})^2-4(2+\sqrt{3})+5|$$

$$-\ln|(3)^2-4(3)+5|=\ln 4-\ln 2=\ln 2$$

$$\boxed{A=\ln 2}$$

c) En posant:

$x=2+\tan t$

avec $t\in[0;\frac{\pi}{2}[$

On a:

$$\begin{cases} x=3 \Leftrightarrow 2+\tan t=3 \Leftrightarrow \tan t=1 \\ \quad t=\frac{\pi}{4} \\ x=2+\sqrt{3} \Leftrightarrow 2+\tan t=2+\sqrt{3} \\ \quad \Leftrightarrow \tan t=\sqrt{3} \\ \quad t=\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$x=2+\tan t \Rightarrow dx=(1+\tan^2 t)\,dt$

$x=2+\tan t \Rightarrow 1+(x-2)^2=1+\tan^2 t$

Pour calculer $B=\displaystyle\int_3^{2+\sqrt{3}}\frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx$

avec le changement de variable:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2 t}(1+\tan^2 t)\,dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}dt$$

$$[t]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{B=\frac{\pi}{12}}$$

Suite Exo4:

d) Pour calculer $J = \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2-4x+5)dx$ à l'aide d'une intégration Par Parties

On pose $\begin{cases} u(x) = \ln(x^2-4x+5) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} u'(x) = \dfrac{2x-4}{x^2-4x+5} \\ v(x) = x \end{cases}$

D'où $J = [x\ln(x^2-4x+5)]_3^{2+\sqrt{3}} - \int_3^{2+\sqrt{3}} \dfrac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}dx$

On remplace dans la premiere partie par les bornes, et dans l'integrale par l'expression trouvée en 4.a):

$J = (2+\sqrt{3})\ln((2+\sqrt{3})^2-4(2+\sqrt{3})+5) - 3\ln((3)^2-4(3)+5) - \int_3^{2+\sqrt{3}} 2\left(1+\dfrac{2x-4}{x^2-4x+5} - \dfrac{1}{1+(x-2)^2}\right)dx$

$J = (2+\sqrt{3})\ln 4 - 3\ln 2 - 2\left(\int_3^{2+\sqrt{3}} dx + \int_3^{2+\sqrt{3}} \dfrac{2x-4}{x^2-4x+5}dx - \int_3^{2+\sqrt{3}} \dfrac{1}{1+(x-2)^2}dx\right)$

d'après 4.b) et 4.c) on a:

$J = (2+\sqrt{3})\ln 2^2 - 3\ln 2 - 2\left([x]_3^{2+\sqrt{3}} + A + B\right)$

$J = 2(2+\sqrt{3})\ln 2 - 3\ln 2 - 2(2+\sqrt{3}-3+\ln 2$

$J = (1+2\sqrt{3})\ln 2 - 2(-1+\sqrt{3}+\ln 2 - \frac{\pi}{12})$

$J = (1+2\sqrt{3})\ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} - 2\ln 2 + \frac{\pi}{6}$

$$\boxed{J = (-1+2\sqrt{3})\ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}}$$

Pour calcul de $K = 2\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln x\,dx$ à l'aide d'une intégration Par Partie.

On pose:

$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$

D'où $K = 2\left([x\ln x]_3^{2+\sqrt{3}} - \int_3^{2+\sqrt{3}} \dfrac{1}{x} x\,dx\right)$

$K = 2\left([x\ln x]_3^{2+\sqrt{3}} - \int_3^{2+\sqrt{3}} dx\right)$

$K = 2\left([x\ln x]_3^{2+\sqrt{3}} - [x]_3^{2+\sqrt{3}}\right)$

$K = 2\left([x\ln x - x]_3^{2+\sqrt{3}}\right)$

$K = 2((2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3}) - 3\ln 3 + 3$

$K = 2((2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 1 - \sqrt{3} - 3\ln 3)$

Suite Exo 4:

$$\boxed{K = (4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 2 - 2\sqrt{3} - 6\ln 3}$$

Pour calculer l'aire S du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives :

$y = 3x - 3$ et $x = 2+\sqrt{3}$

$x = 3$

On remarque que pour tout $x \geq 3$ la droite d'équation $y = 3x-3$ est au dessus de la courbe.

Alors:

$$S = \int_3^{2+\sqrt{3}} (y - f(x))\,dx$$

$$= -\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right) dx$$

$$= -\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2-4x+5)\,dx + \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2)\,dx$$

Donc $S = -J + K$

$$S = -\left((-1+2\sqrt{3})\ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right) + \left((4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 2 - 2\sqrt{3} - 6\ln 3\right)$$

$$S = (1-2\sqrt{3})\ln 2 - 2 + 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} + (4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 2 - 2\sqrt{3} - 6\ln 3$$

$$S = (1-2\sqrt{3})\ln 2 + (4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) - 6\ln 3 - \frac{\pi}{6}$$

en unité d'aire.

$$\boxed{S \simeq 1{,}0066 \text{ en unité d'aire}}$$

Fin