EXERCICE 3 (4 POINTS)

On considère la suite numérique (U_n) définie par tout n de IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \end{cases}$

1.a) Calculer U_1, U_2.

b) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout n, $0 \le U_n < 2$

2) On considère la suite (V_n) définie pour tout n par $V_n = 2 - U_n$

a) Montrer que, pour tout entier n, $0 < \frac{V_{n+1}}{V_n} \le \frac{1}{2}$. En déduire le sens de variation de (V_n) puis celui de (U_n).

b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence montrer que $0 < V_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

c) En déduire la limite de la suite (V_n) puis celle de la suite (U_n).

Nom = mariem/Ahmed Salem
Numero = $\boxed{1269}$

Classe = 7(1)

Exo : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

1)- $n = 0 \Rightarrow u_1 = \sqrt{2 + u_0} = \sqrt{2}$
$n = 1 \Rightarrow u_2 = \sqrt{2 + u_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

b) $\boxed{1}$ pour $n = 0$. On a $u_0 = 0$
donc $0 \le u_0 < 2$ vraie

$\boxed{2}$ On suppose que $0 \le u_n < 2$
et on montre que $0 \le u_{n+1} < 2$
D'après l'hypothèse, en ajoutant 2 On a ; $2 \le 2 + u_n < 4$

$\Rightarrow \sqrt{2} \le \sqrt{2 + u_n} < \sqrt{4}$
$\Rightarrow 0 < \sqrt{2} \le u_{n+1} < 2$

$\Rightarrow 0 \le u_{n+1} < 2$

ce qui il fait de montre

$\boxed{3}$ Conclusion

$\boxed{\forall n ; 0 \le u_n < 2}$

2)- $V_n = 2 - u_n$

a)- On a $V_n > 0$ car $u_n < 2$; $\forall n$
$\Rightarrow V_{n+1} > 0$ et $V_n > 0 \Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} > 0$

D'autre part ;

$\frac{V_{n+1}}{V_n} - \frac{1}{2} = \frac{2V_{n+1} - V_n}{2V_n}$

$= \frac{2(2 - u_{n+1}) - (2 - u_n)}{2V_n}$

$= \frac{2 - 2u_{n+1} + u_n}{2V_n}$

$= \frac{2 + u_n - 2\sqrt{2 + u_n}}{2V_n}$

$= \frac{(\sqrt{2 + u_n} - 1)^2 - 1}{2V_n}$

$= \frac{(u_{n+1} - 1)^2 - 1}{2V_n}$

$= \frac{(u_{n+1} - 2)(u_{n+1})}{2V_n}$

$\boxed{= \frac{-V_{n+1} \cdot u_{n+1}}{2V_n}}$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{1}{2} \leq 0$ car $\left| \begin{array}{l} v_n > 0 \\ v_{n+1} > 0 \\ u_{n+1} > 0 \end{array} \right.$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{1}{2} \leq 0 \Rightarrow \boxed{\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{1}{2}}$

Enfin ; pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{0 \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}}$$

Comme (v_n) est positive avec $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$; alors (v_n) est decroissante

On a ; $u_n = 2 - v_n$
$\Rightarrow u_{n+1} = 2 - v_{n+1}$ et

$u_{n+1} - u_n = 2 - v_{n+1} - (2 - v_n)$
$= -v_{n+1} + v_n$
$= -(v_{n+1} - v_n)$

$u_{n+1} - u_n \geq 0$ car (v_n) est decroissante

Alors (u_n) est croissante

2.b)

[1] pour $n = 0$

1er membre ; $v_0 = 2 - u_0 = 2$
2nd membre ; $(\frac{1}{2})^{-1} = 2$

$2 \leq 2$ alors $0 \leq v_0 \leq (\frac{1}{2})^{-1}$

vraie

[2] On suppose que

$0 \leq v_n \leq (\frac{1}{2})^{n-1}$

et on montre que $0 \leq v_{n+1} \leq (\frac{1}{2})^n$

D'après l'hypothèse

$0 \leq v_n \leq (\frac{1}{2})^{n-1}$

On a $0 < \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$

$0 \leq \frac{1}{2} v_n \leq (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{2})^{n-1}$

$0 \leq \frac{1}{2} v_n \leq (\frac{1}{2})^n$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2} v_{n+1} \leq (\frac{1}{2})^n$

[3] Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$
$0 \leq v_n \leq (\frac{1}{2})^{n-1}$

D'après le Thé de gendarmes
$\lim v_n = 0$
Donc $\lim (2 - u_n) = 0$
$\Rightarrow \lim u_n = 0$