

Mariam mint cidi mohamed / Elhamed
7 D₁
ERRAJA

Exercice 2

Pour tout entier naturel n on pose : $S_n = \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$

1) Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k+3}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$

2) En déduire une expression simple de S_n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Solution

$$S_n = \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$1) \frac{2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k+3} = \frac{2ak+3a+2bk+b}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(2a+2b)k+3a+b}{(2k+1)(2k+3)}$$

par identification

$$\begin{cases} 2a+2b=0 \Rightarrow 2b=-a \\ = -a \\ 3a+b=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=-a \\ 3a-a=2 \Rightarrow 2a=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=-a=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

$$2) \frac{2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}$$

casca:

$$\frac{2}{1 \times 3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3 \times 5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{5 \times 7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$$

$$\vdots$$
$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2n+3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2n+3} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$$

2