Oumoukelthoum Cheikh Ahmedou Tolba 7D1

1) On considère les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

E_1 : $z^2 - 6z + 25 = 0$

E_2 : $z^2 - 8z + 25 = 0$

a) Résoudre E_1. On note z_1 et z_2 ses solutions avec $\text{Im}(z_1) > 0$.

b Résoudre E_2. On note z_3 et z_4 ses solutions avec $\text{Im}(z_3) > 0$.

c) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres $z_1 + z_3$ et $z_1 \times z_3$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 3+4i$ on pose : $f(z) = \frac{z-4-3i}{z-3-4i}$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3+4i$, $z_B = 4+3i$ et $z_C = 4+4i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Calculer et mettre sous forme algébrique le nombre complexe $f(4+4i)$. Interpréter graphiquement.

c) Déterminer et représenter, dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, les ensembles de points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

Γ_1 tel que $|f(z)| = 1$.

Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

1) Résolutions d'équations:

a) E_1 : $z^2 - 6z + 25 = 0$

Le descriminent : $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(25)$

$= 36 - 100$

$\Delta = -64 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = (8i)^2$

$z_1 = \frac{6+8i}{2} = 3+4i$

$z_2 = \frac{6-8i}{2} = 3-4i$ l'ensemble des solutions :

$\boxed{S = \{3+4i \,;\, 3-4i\}}$

b) E_2 : $z^2 - 8z + 25 = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4(1)(25)$

$= 64 - 100 \Rightarrow \Delta = -36 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = (6i)^2$

$z_3 = \frac{8+6i}{2} = 4+3i$ et

$z_4 = \frac{8-6i}{2} = 4-3i$ l'ensemble des solutions

est $\boxed{S = \{4+3i \,;\, 4-3i\}}$

Ⓒ. Forme trigonometrique de $z_1 + z_3$:

$$z_1 + z_3 = 3 + 4i + 4 + 3i = 7 + 7i$$

$$|z_1 + z_3| = \sqrt{(7)^2 + (7)^2} = \sqrt{49 + 49} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$\arg(z_1 + z_3) = \arg(7 + 7i) = \pi/4$$

$$z_1 + z_3 = 7\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \boxed{z_1 + z_3 = 7\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

• Forme trigonometrique de $z_1 \times z_3$:

$$z_1 \times z_3 = (3 + 4i)(4 + 3i)$$

$$= 12 + 9i + 16i + 12i^2$$

$$= \cancel{12} + 9i + 16i - \cancel{12}$$

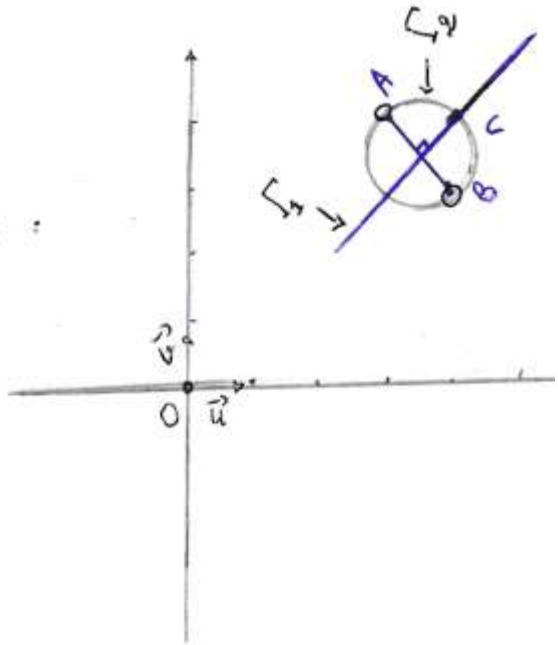
$$\boxed{z_1 \times z_3 = 25i}$$

$$|z_1 \times z_3| = |25i| = 25$$

$$\arg(z_1 \times z_3) = \arg(25i) = \pi/2$$

$$= 25\left(\cos\pi/2 + i\sin\pi/2\right)$$

②. ⓐ Représentation des points :



$$z_A = 3 + 4i \Rightarrow A(3;4)$$

$$z_B = 4 + 3i \Rightarrow B(4;3)$$

$$z_C = 4 + 4i \Rightarrow C(4;4)$$

b- Calcule de $f(4+4i)$

On a : $f(z) = \dfrac{z-4-3i}{z-3-4i}$. On remplace z par $4+4i$:

$$f(4+4i) = \frac{4+4i-4-3i}{4+4i-3-4i} = \frac{i}{1} = i$$

$$f(4+4i) = \frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} = i$$

Le triangle ABC est isocèle rectangle en C .

c
. l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z telsque

$|f(z)| = 1 \Rightarrow \left|\dfrac{z-4-3i}{z-3-4i}\right| = 1$. On constate

que $f(z) = \dfrac{z - z}{z - z_A}$

Alors : $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right| = 1 \Leftrightarrow |z - z_B| = |z - z_A|$

$\Leftrightarrow MB = MA$. D'ou l'ensemble Γ_1 est la

médiatrice du segment [AB] , pour la construction

Voir la figure .

. l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z

telsque $f(z)$ soit imaginaire pur .

$\arg(f(z)) = \frac{\pi}{2} \ [\pi]$

$\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$

M d'écrit $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ privé de

A et B .

Pour construction voir figure .