Zeïnebou mint ISmail
7D5 . EL MAARIF

Exercice : 9 Bac 2010

- On considère la suite numerique (U_n) definie pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$U_n = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}.$$

1. a) Calculer U_1 ; U_2 est U_3.

   b) justifier que la suite (U_n) :

- N'est pas arithmetique ;
- N'est pas géometrique ;
- Est convergente .

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$V_n = \frac{n^2-1}{n}$$

   a) Montrer que : $U_n = V_{n+1} - V_n$.

   b) En deduire l'expression de la somme :

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$ en fonctions de n.

3). Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :

$$W_n = \ln V_n \quad \text{et} \quad S'_n = W_2 + W_3 + \dots + W_n.$$

Demontrer que :

$$S'_n = \ln\left(\frac{(n+1)!}{2n}\right).$$

Solution. Exercice 9. Bac 2010

Zeïnebou mint Ismail
7D$_5$. EL MAARIF

La suite numerique (U_n) est definie pour tout entier $n \geq 1$ par : $U_n = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$.

1). a) Calcule de termes :

$U_1 = \frac{1^2+1+1}{1(1+1)} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{U_1 = \frac{3}{2}}$

$U_2 = \frac{2^2+2+1}{2(2+1)} = \frac{7}{6} \Rightarrow \boxed{U_2 = \frac{7}{6}}$

$U_3 = \frac{3^2+3+1}{3(3+1)} = \frac{13}{12} \Rightarrow \boxed{U_3 = \frac{13}{12}}$

b) On a :

- $U_2 - U_1 = \frac{7}{6} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{3}$ et $U_3 - U_2 = \frac{13}{12} - \frac{7}{6} = -\frac{1}{12}$.

Comme $U_2 - U_1 \neq U_3 - U_2$, la suite (U_n) n'est pas arithmetique

- $\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{9}$ et $\frac{U_3}{U_2} = \frac{\frac{13}{12}}{\frac{7}{6}} = \frac{13}{14}$.

Comme $\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_3}{U_2}$, la suite (U_n) n'est pas géométrique.

- $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$.

La suite (U_n) admet une limite finie, donc (U_n) est Convergente.

2). Pour $n \geq 1$, $V_n = \frac{n^2-1}{n}$.

a) On a :

$V_{n+1} - V_n = \frac{(n+1)^2-1}{n+1} - \frac{n^2-1}{n} = \frac{n^2+2n+1-1}{n+1} - \frac{n^2-1}{n}$

$V_{n+1} - V_n = \frac{n^2+2n}{n+1} - \frac{n^2-1}{n} = \frac{n(n^2+2n)-(n+1)(n^2-1)}{n(n+1)} = \frac{n^3+2n^2-(n^3-n+n^2-1)}{n(n+1)}$

$V_{n+1} - V_n = \frac{n^3+2n^2-n^3+n-n^2+1}{n(n+1)} = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$, Alors : $U_n = V_{n+1} - V_n$

b) On utilise le résultat précédent pour simplifier la somme $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$. on obtient :

$$\begin{cases} U_1 = V_2 - V_1 \\ U_2 = V_3 - V_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} = V_n - V_{n-1} \\ U_n = V_{n+1} - V_n \end{cases}$$

- En faisant la somme on trouve

$$S_n = V_{n+1} - V_1.$$

- on sait que $V_{n+1} = \frac{n^2 + 2n}{n+1}$ et $V_1 = 0$. Alors $S_n = \frac{n^2 + 2n}{n+1}$

3. Pour tout entiers $n \geqslant 2$:

$W_n = \ln V_n$ et $S'_n = W_2 + W_3 + \dots + W_n$.

On a : $S'_n = \ln V_2 + \ln V_3 + \dots + \ln V_n = \ln(V_2 \times V_3 \times \dots \times V_n)$.

D'autre part, on peut écrire : $V_n = \frac{n^2 - 1}{n} = \frac{(n-1)(n+1)}{n}$

Donc : $V_2 \times V_3 \times \dots \times V_n = \frac{1 \times 3}{2} \times \frac{2 \times 4}{3} \times \frac{3 \times 5}{4} \times \frac{4 \times 6}{5} \dots \times \frac{(n-1)(n+1)}{n}$

Après simplification, on peut ecrire :

$V_2 \times V_3 \times \dots \times V_n = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (n-1)}{2} \times (n+1)$.

On peut aussi ecrire :

$$V_2 \times V_3 \times \dots \times V_n = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (n-1) \times n \times (n+1)}{2n}$$

D'où :

$$V_2 \times V_3 \times \dots \times V_n = \frac{(n+1)!}{2n}.$$ En fin

$$S'_n = \ln\left(\frac{(n+1)!}{2n}\right).$$