Meimouna Mint Amar/Bouhoubeiny

7C1

Bac 2013 :

Session Normale :

Exercice 1 :

1-a) $25 = 9\times2+7$

$9 = 7\times1+2$

$7 = 2\times3+1$

* $1 = 7-2\times3$

$= 7-(9-7\times1)\times3$

$= 7-9\times3+7\times3$

$= 7\times4-9\times3$

$= (25-9\times2)\times4-9\times3$

$= 25\times4+9\times(-11)$

Donc : $(u,v) = (4,-11)$

$25u+9v=1$

$\Leftrightarrow 25u-9(-v)=1$

$\Leftrightarrow 25(5u)-9(-5v)=5$

D'où : $(x_0, y_0) = (5\times4 ; -5\times-11)$

$= (20 , 55)$

est une solution particulière de (E).

b) $25x - 9y = 25\times 20 - 9\times 55$

$\Leftrightarrow 25x - 25\times 20 = 9y - 9\times 55$

$\Leftrightarrow 25(x-20) = 9(y-55)$

$25 \wedge 9 = 1 \Rightarrow 9 / x-20$

$\Rightarrow x - 20 = 9k$

$x = 20 + 9K.$

en remplaçant x par $20+9K$ on a :

$25\times \cancel{9}K = \cancel{9}(y-55)$

$\Rightarrow y = 25K + 55$

Donc :

$$S : \begin{cases} x = 20 + 9K \\ y = 55 + 25K \end{cases} \quad K \in \mathbb{Z}$$

2-a) $d = PGCD\ (x,y)$

$\Rightarrow d/x$ et d/y

$\Rightarrow d/(25x - 9y) = 5$

$\Rightarrow d/5$

d est diviseur positif de 5

$\Rightarrow d \in \{1,5\}$

b) x et y sont premiers entre eux si $d = 1$. C'est à dire si x n'est pas divisible par 5, ce qui est le cas si K n'est pas multiple de 5.

c) (x^2, y^2) est une solution de (E) ssi :

$25x^2 - 9y^2 = 5$

$\Leftrightarrow (5x-3y)(5x+3y) = 5$

$\Leftrightarrow (5x-3y) / 5$

$\Rightarrow \begin{cases} 5x-3y=5 \\ 5x+3y=1 \end{cases}$ où $\begin{cases} 5x-3y=1 \\ 5x+3y=5 \end{cases}$

$\Rightarrow 10x = 6 \Rightarrow x = 0{,}6$

Impossible car $x \in \mathbb{Z}$.

Meimouna Mint Amar/Bouhoubeiny.
7C1

Bac 2013 :
Session Normale :

Exercice 2 :

$P(z) = z^3 - (9-i)z^2 + (28-5i)z - 32 + 4i$

a) $P(4) = 4^3 - (9-i)\times 16 + 4(28-5i) - 32 + 4i$

$= 64 - 144 + 16i + 112 - 20i - 32 + 4i$

$= 0$

$P(z) = (z-4)(z^2 + az + b)$

En utilisant le tableau d'Horner :

	1	$-9+i$	$28-5i$	$-32+4i$
4		4	$-20+4i$	$32-4i$
	1	$-5+i$	$8-i$	0

$P(z) = (z-4)(z^2 + (-5+i)z + 8 - i)$

b) $P(z) = 0 \iff z - 4 = 0 \iff z = 4$

où $z^2 + (-5+i)z + 8 - i = 0$

$\Delta = (-5+i)^2 - 4\times 1(8-i)$

$= 25 - 10i - 1 - 32 + 4i$

$= -8 - 6i = (1-3i)^2$

$$z_1 = \frac{5-i+1-3i}{2} = 3-2i$$

$$z_2 = \frac{5+i-1+3i}{2} = 2+i$$

$$S = \{4 \,;\, 3-2i \,;\, 2+i\}$$

2) $A(4)$; $B(2+i)$ et $C(3-2i)$

a) $S : M(z) \longrightarrow M'(z')$

$$z' = az+b \;/\; a,b \in \mathbb{C}$$

$S : C \longrightarrow C \Leftrightarrow z_C = az_C + b \;(1)$

$S : A \longrightarrow B \Leftrightarrow z_B = az_A + b \;(2)$

$(1)-(2)$ donnent :

$$z_C - z_B = a(z_C - z_A)$$

$$\Rightarrow a = \frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} = \frac{3-2i-2-i}{3-2i-4}$$

$$= \frac{1-3i}{-1-2i} = \frac{(1-3i)(-1+2i)}{1+4}$$

$$= \frac{5+5i}{5} = 1+i$$

$$b = z_C - az_C = (1-a)z_C$$

$$= (1-1-i)(3-2i)$$

$$= -3i-2$$

<u>Donc</u> : $S : M(z) \longrightarrow M'(z')$

$$z' = (1+i)z - 2 - 3i$$

b) Le rapport $k = |1+i| = \sqrt{2}$

l'angle $\theta = Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

3°) $Q(z) = z^2 - (5-i)z + 8 - i$

a) $Q(z) = (x+iy)^2 - (5-i)(x+iy) + 8 - i$

$= x^2 - y^2 + 2xyi - 5x - 5iy - xi - y + 8 - i$

$\Leftrightarrow Q(z) = x^2 - y^2 - 5x - y + 8 + i(2xy - 5y - x - i)$

$\Gamma = \{M \in P / Q(z)$ est imaginaire pur non nul$\}$.

$Re\, Q(z) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 5x - y + 8 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{24}{4} + 8 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2$

$\Leftrightarrow -\frac{(x - 5/2)}{(\sqrt{2})^2} + \frac{\left(y + \frac{1}{2}\right)}{(\sqrt{2})^2} = 1$

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega\left(\frac{5}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$

Γ a pour équation : $\frac{-x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$

D'où Γ est une hyperbole de centre Ω

b) et de sommets :

$B(0, \sqrt{2})$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

et $B'(0, -\sqrt{2})$. Mais dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a :

$B\left(\frac{5}{2} ; \sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$ et

$B'\left(\frac{5}{2} ; -\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$

Les asymptotes Δ et Δ' ont pour équations dans le repére $(O, \vec{I}, \vec{J})$

$\Delta = y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} X = x$ et

$\Delta' = y = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} X = -x$

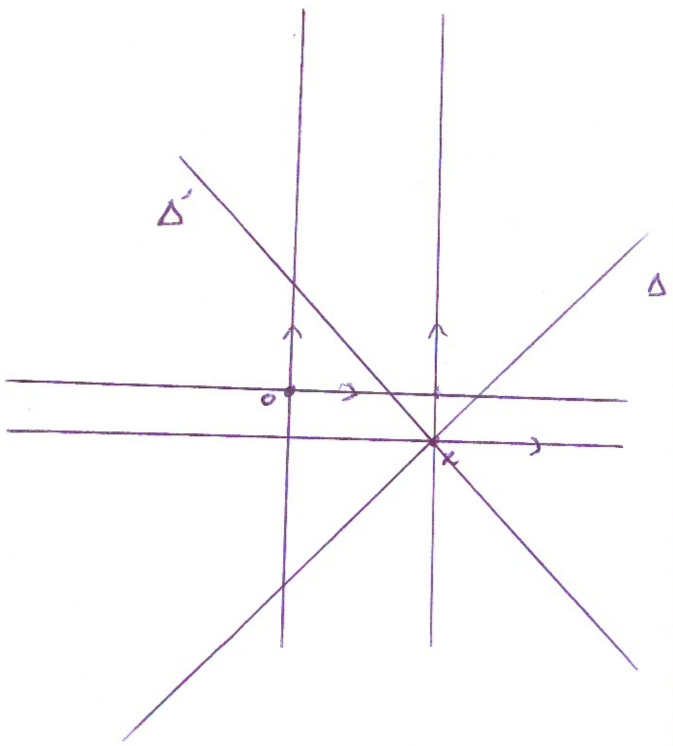
et dans le repére $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on a :

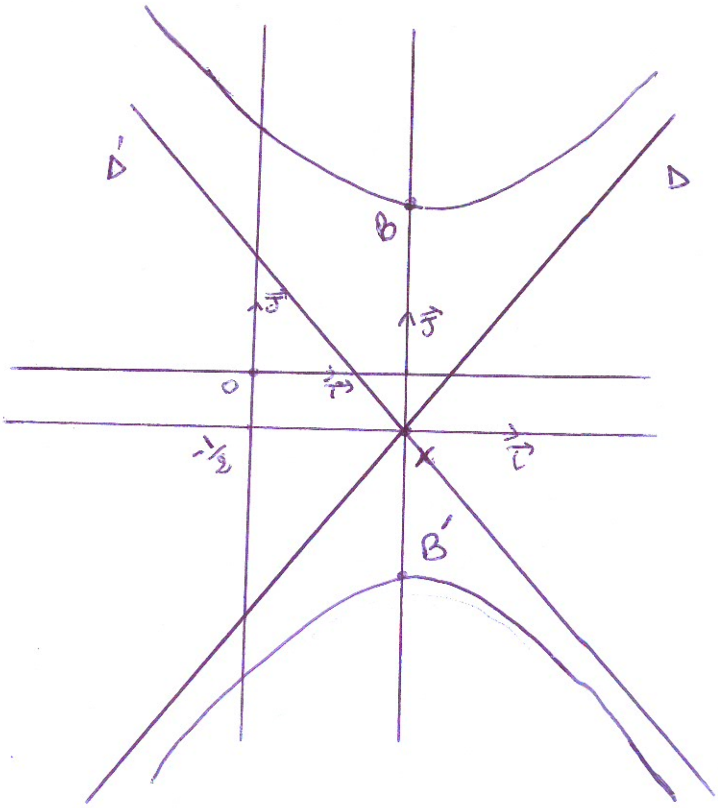
$y + \frac{1}{2} = x - \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \Delta = y = x - 3$

et $y + \frac{1}{2} = -x + \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \Delta' = y = -x + 2$.





Meimouna Mint Amar / Bouhoubeiny

7C1

Bac 2013 :

Session Normale :

Exercice 3 :

1°) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (3e^x - xe^x) = 0$

$\Rightarrow$ la droite $(Ox) : y = 0$ est une AH de $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (3-x)e^x = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(3-x)e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{x} - 1\right)e^x = -\infty$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

b) $f'(x) = -1e^x + (3-x)e^x$
$= (-1+3-x)e^x = (2-x)e^x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2-x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

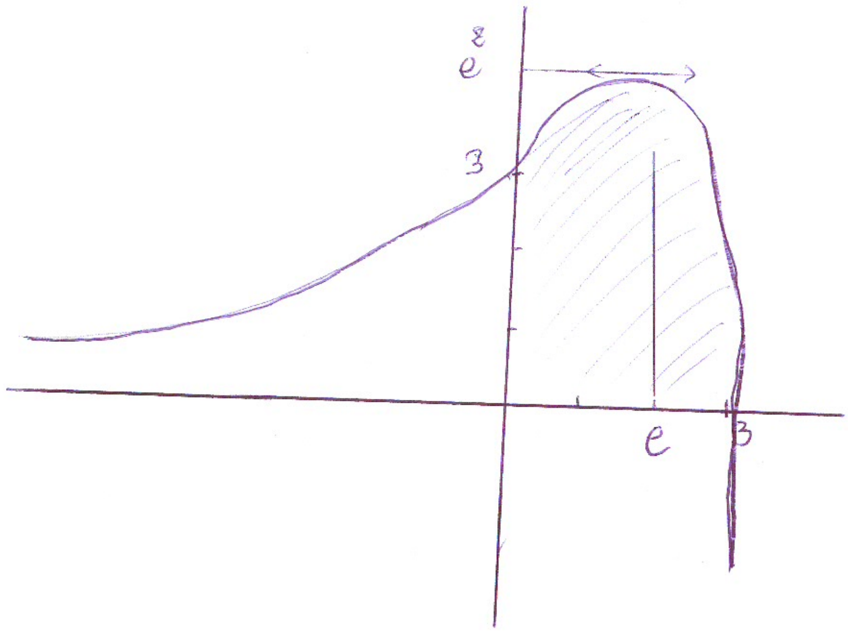
T.V de f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$-\infty$

c) $\mathcal{C}_f \cap (Ox)$: $f(x) = 0 \iff (3-x)e^x = 0$

$\iff 3 - x = 0 \iff x = 3$

$\mathcal{C}_f \cap (Ox) = \{(3, 0)\}$



d) $f'(x) - f(x) = (2-x)e^x - (3-x)e^x$

$= (2 - x - 3 + x)e^x = -e^x$

$\iff f$ est solution de l'equation differentielle

$y' - y = -e^x$

<u>Calcul d'Aire :</u>

$$A = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 (f'(x) + e^x)\,dx$$

$$= \left[f(x) + e^x\right]_0^3 = (e^3 - 4) \text{ u.a}$$

2°) a) $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{3^n}$

$$= \frac{\cancel{3^n} \times 3 \times \cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}\,\cancel{3^n}} = \frac{3}{(n+1)}$$

or $n \geq 3 \iff n+1 \geq 4$

$$\iff \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{4}$$

$$\iff 0 \leq \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4}$$

$$\iff 0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4}$$

b) On a : $0 \leq \dfrac{U_{k+1}}{U_k} \leq \dfrac{3}{4}$

pour tout $k \geq 3$

* $k=3$ on a : $0 \leq \dfrac{U_4}{U_3} \leq \dfrac{3}{4}$

$k=4$ " " $0 \leq \dfrac{U_5}{U_4} \leq \dfrac{3}{4}$

$k=5$ " " $0 \leq \dfrac{U_6}{U_5} \leq \dfrac{3}{4}$

" " "

" " "

$k=n-2$ $0 \leq \dfrac{U_{n-1}}{U_{n-2}} \leq \dfrac{3}{4}$

$k=n-1$ $0 \leq \dfrac{U_n}{U_{n-1}} \leq \dfrac{3}{4}$

En multipliant les mêmbres entre eux et en simplifiant on aura :

$$0 \leq \frac{U_n}{U_3} \leq \underbrace{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \cdots \times \frac{3}{4}}_{(n-4+1)\ \text{fois}} \qquad (3).$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{U_n}{U_3} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq U_n \leq U_3 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq U_n \leq \frac{9}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$$

* Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} = 0$ Car $0 < \frac{3}{4} < 1$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ (T. G)

3°) $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^3 (3-x)^n e^x \, dx$

$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!}$

a) $I_1 = \frac{1}{1!} \int_0^3 (3-x) e^x \, dx$

$$= \int_0^3 f(x) \, dx = A = e^3 - 4$$

b) on a : $0 \leq x \leq 3$

$$\Leftrightarrow -3 \leq -x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 3-x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (3-x)^n \leq 3^n$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (3-x)^n e^x \leq 3^n e^x$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^3 (3-x)^n e^x \, dx \leq \int_0^3 3^n e^x \, dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{n!} \int_0^3 (3-x)^n e^x \, dx \leq \frac{3^n}{n!} \int_0^3 e^x \, dx$$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq I_n \leq U_n \left[e^x\right]_0^3$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq I_n \leq (e^3 - 1) U_n$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (e^3 - 1) U_n = (e^3 - 1) x$
$= 0$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

c) $I_{n+1} = \left[\frac{1}{(n+1)!} \int_0^3 (3-x)^{n+1} e^x \, dx\right]$

$$\begin{cases} U(x) = (3-x)^{n+1} \Rightarrow u'(x) = -(n+1)(3-x)^n \\ V'(x) = e^x \quad \Rightarrow V(x) = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left[\left[e^x (3-x)^{n+1}\right] - \int_0^3 -(n+1)(3-x)^n e^x \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \left[-3^{n+1} + (n+1) \int_0^3 (3-x)^n e^x \, dx\right]$$

$$= \frac{-3^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(n+1)}{(n+1)n!} \int_0^3 (3-x)^n e^x \, dx$$

$\Leftrightarrow \quad I_{n+1} = -U_{n+1} + I_n$

d) Demontrons par récurrence que $\forall n \geq 1$;

$$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + I_n$$

* verifions pour $n = 1$.

pour $n = 1$ on a : $\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + I_1 = 1 + 3 + e^3 - 4$
$= e^3$.

Vrai pour $n = 1$

On suppose que :

$$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + I_n$$

On démontre que :

$$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

on a :

$$\underbrace{1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{e^n}}_{(e^3 - \cancel{I_n})} + \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

$$(e^3 - \cancel{I_n}) + \cancel{u_{n+1}} + \cancel{I_n} - \cancel{u_{n+1}}$$

$$= e^3$$

<u>Conclusion :</u>

$\forall n \geq 1$ on a :

$$e^3 = \underbrace{1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!}}_{S_n} + I_n$$

On a :

$$e^3 = S_n + I_n$$

$$\Leftrightarrow S_n = e^3 - I_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} e^3 - I_n$$

$$= e^3 - 0$$

$$= e^3.$$

Meimouna Mint Amar / Bouhoubeiny
$7C_1$

Bac 2013 :
Session Normale :

Exercice 4 :

$$\begin{cases} g(x) = 1 + x^3 - 3x^3 \ln x & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

1 - a) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 + x^3 - 3(x^3 \ln x)$
$= 1 + 0 - 3 \times 0 = 1 = g(0)$

Donc g est continue en 0^+

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \left(\frac{1}{x^3} + 1 - 3 \ln x \right)$
$= +\infty (0 + 1 - \infty) = -\infty$

b) $g'(x) = 3x^2 - \left(9x^2 \ln x + 3x^3 \times \frac{1}{x} \right)$
$= \cancel{3x^2} - 9x^2 \ln x - \cancel{3x^2}$
$= -9x^2 \ln x.$

T.V de g :

x	0		1		$+\infty$
$-9x^2$	0	$-$		$-$	
$\ln x$	$\|$	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

c) g est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ et change de signe donc l'equation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha > 1$.

Comme $g(1) = 2 > 0$

et $g(2) = 9 - 24\ln 2 < 0$

Alors $1 < \alpha < 2$

g est $\searrow$ sur $[1,+\infty[$ pour $1 < x < \alpha$ on a :

$$g(x) > g(\alpha) = 0$$

pour $x > \alpha$ on a :

$$g(x) < g(\alpha)$$

D'où :

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

2°) $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^3}$; $x > 0$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{-\infty}{1} = -\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim \frac{\ln x}{x} \times \left(\frac{x}{1+x^3}\right)$$
$$= 0 \times 0 = 0$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

b) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+x^3) - 3x^2 \ln x}{(1+x^3)^2}$

$= \dfrac{1 + x^3 - 3x^3 \ln x}{\ldots}$

$$= \frac{g(x)}{x(1+x^3)^2}$$

T.V de g :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3°) $\forall x \geq 1$; $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

a) f est Continue sur $[1, +\infty[$

donc elle admet primitive H derivable sur $[1, +\infty[$

$F(x) = H(x) - H(1)$

Donc $F(x)$ est derivable et $F'(x) = H'(x) - 0$
$= f(x)$

pour Tout $x \geq 1$; $f(x) \geq 0$

donc F est Croissante T.V de f :

x	1		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	1

b) pour $t \geq 1$ on a :

$1 < t^3 \leq 1 + t^3 \leq (1+t)^3$

Car $(1+t)^3 = 1 + 3t + 3t^2 + t^3 \geq t^3$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+t)^3} \leq \frac{1}{1+t^3} \leq \frac{1}{t^3}$$

$t \geq 1 \Rightarrow \ln t \geq 0$

donc $\frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq \frac{\ln t}{1+t^3} \leq \frac{\ln t}{t^3}$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^3}$$

c) $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^3}\, dt$

$$\begin{cases} u(t) = \ln t & \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = \frac{1}{t^3} & \Rightarrow v(t) = \frac{-1}{2t^2} \end{cases}$$

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^3}\, dt = \left[-\frac{\ln t}{2t^2}\right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t} \times \frac{1}{2t^2}\, dt$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{dt}{t^3}$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2t^2}\right]_1^x = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x^2} + 1\right)$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4}.$$

d) $\displaystyle\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2}$

$$= \frac{a(1+t)^2}{t(1+t)^2} + \frac{b\sqrt{(t+1)}}{t(1+t)^2} + \frac{ct}{t(1+t)^2}$$

$$\frac{(a+b)t^2 + (2a+b+c)t + a}{t(t+1)^2}$$

par identification des coefficients des deux numerateurs on a :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$$

4-a) on a : $\frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^3}$

$$\Longrightarrow \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3}\,dt \leq \int_1^x f(t)\,dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t^3}\,dt$$

On pose : $J = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3}\,dt$

Calculons J :

$$u(t) = \ln t \Longrightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$$

$$v'(t) = \frac{1}{(1+t)^3} \Longrightarrow v(t) = \frac{-1}{2(1+t)^2}$$

$$\Longrightarrow \left[\frac{-\ln t}{2(1+t)^2}\right]_1^x + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t} \times \frac{1}{(1+t)^2}\,dt$$

$$= \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}\,dt$$

$$= \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\left[\ln t - \ln(t+1) + \frac{1}{t+1}\right]_1^x$$

$$= \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{t}{t+1}\right) + \frac{1}{t+1}\right]_1^x$$

$$= \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1-2\ln 2}{4}$$

Donc :

On remplace les integrales ;

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^3}\,dt \quad \text{et} \quad J = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3}\,dt$$

par leurs valeurs on a :

$$-\frac{\ln x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1-2\ln 2}{4} \leq f(x)$$

$$\leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} - \frac{\ln x}{2x^2}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} = \lim_{+\infty} \frac{-\ln x}{x} \times \frac{x}{2(1+x)^2}$$

$$= 0 \times 0 \quad \text{Car} \quad \lim_{+\infty} \frac{x}{2(1+x)^2}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{x}{2x^2} = \lim_{+\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

$$= \lim_{+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0$$

donc :

$$0-0+0-\frac{1-2\ln 2}{4} \leq \ell \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \; -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{4}.$$