Baccalauréat 2013

Session normal.

Yemhelha Ely.

Exercice 1 :

1-a) $25 = 9\times2+7$

$9 = 7\times1+2$

$7 = 2\times3+1$

* $1 = 7-2\times3$

$= 7-(9-7\times1)\times3$

$= 7-9\times3+7\times3$

$= 7\times4-9\times3$

$= (25-9\times2)\times4-9\times3$

$= 25\times4+9\times(-11)$

Donc $(u,v)=(4,-11)$

$25u+9v=1$

$\Leftrightarrow 25u-9(-v)=1$

$\Leftrightarrow 25(5u)-9(-5v)=5$

D'où $(x_0,y_0)=(5\times4, -5\times-11)$

$=(20;55)$ est une solution particulière de (E)

b) $25x-9y=25\times20-9\times55$

$\Leftrightarrow 25x-25\times20=9y-9\times55$

$\Rightarrow 25(x-20)=9(y-55)$

$25\wedge9=1 \Rightarrow 9/x-20$

$\Rightarrow x-20=9k$

$\Rightarrow x=20+9k$

En remplaçant x par $20+9k$ on a :

$25\times\cancel{9}k=\cancel{9}(y-55)$

$\Rightarrow y=25k+55$

donc : $S: \begin{cases} x=20+9k \\ y=55+25k \end{cases}$

2-a) $d=P.G.C.D(x,y)$

$\Rightarrow d/x$ et d/y

$\Rightarrow d/(25x-9y)=5$

$\Rightarrow d/5$

$\Rightarrow d$ est diviseur par de 5

$\Rightarrow d\in\{1,5\}$

b) x et y sont premiers entre eux si $d=1$ c'est-à-dire si x n'est pas divisible par 5, ce qui est

Ce qui est   car si k n'est pas multiple de 5.

c) (x^2, y^2) est une solution de (E) ssi

$$25x^2 - 9y^2 = 5$$

$\Rightarrow (5x-3y)(5x+3y) = 5$

$\Rightarrow (5x-3y) / 5 \Rightarrow$

$\begin{cases} 5x-3y=5 \\ 5x+3y=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 5x-3y=-5 \\ 5x+3y=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow 10x = 6 \Rightarrow x = 0{,}6$ impossible car $x \in \cancel{\mathbb{R}}$. $\mathbb{N}$.

Exercice 2 :

1) $P(z) = z^3 - (9-i)z^2 + (28-5i)z - 32 + 4i$

a) $P(4) = 4^3 - (9-i)(4)^2 + (28-5i)(4) - 32 + 4i$

$= 64 - 144 + 16i + 112 - 20i - 32 + 4i$

$= 0$

$P(z) = (z-4)(z^2 + az + b)$

En utilisant le tableau d'horner :

	1	$-9+i$	$28-5i$	$-32+4i$
4		4	$-20+4i$	$32-4i$
	1	$-5+i$	$8-i$	0

$P(z) = (z-4)(z^2 + (-5+i)z + 8 - i)$

b) $P(z) = 0 \Rightarrow z - 4 = 0 \Rightarrow z = 4$

ou $z^2 + (-5+i)z + 8 - i = 0$

$\Delta = (-5+i)^2 - 4 \times 1\,(8-i)$

$= 25 - 10i - 1 - 32 + 4i$

$= -8 - 6i = (1-3i)^2$

$z_1 = \dfrac{5-i+1-3i}{2} = 3 - 2i$

$z_2 = \dfrac{5-i-1+3i}{2} = 2 + i$

$S = \{4, 3-2i, 2+i\}$

2) $A(4)$; $B(2+i)$; $C(3-2i)$

a) $S : M(z) \longrightarrow M'(z')$

$z' = az + b \,/\, a, b \in \mathbb{C}$

$S : C \longrightarrow C \Rightarrow z_C = a z_C + b$ ①

$S : A \longrightarrow B \Rightarrow z_B = a z_A + b$ ②

① − ② donne :

$z_C - z_B = a(z_C - z_A)$

$\Rightarrow a = \dfrac{z_C - z_B}{z_C - z_A} = \dfrac{3-2i-2-i}{3-2i-4}$

$= \dfrac{1-3i}{-1-2i} = \dfrac{(1-3i)(-1+2i)}{1+4}$

$= \dfrac{5+5i}{5} = 1 + i$

$b = z_C - a z_C = (1-a) z_C$

$= (1-5-i)(3-2i)$

$= -3i - 2$

Donc :

$S : M(z) \longrightarrow M'(z')$

$z' = (1+i)z - 2 - 3i$

b) le rapport : $k = |1+i| = \sqrt{2}$

l'angle $\theta = \arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$

3) $\varphi(z) = z^2 - (5-i)z + 8 - i$

a) $\varphi(z) = (x+iy)^2 - (5-i)(x+iy) + 8 - i$

$\Rightarrow \varphi(z) = x^2 - y^2 - 5x - y + 8 + i(2xy - 5y - x)$

$\Gamma = \{M \in P \,/\, \varphi(z)$ est imaginaire pure non nul

$\Rightarrow \mathrm{Re}(\varphi)(z) = 0$

$\Rightarrow x^2-y^2-5x+y+8=0$

$\Rightarrow (x-\frac{5}{2})^2-(y+\frac{1}{2})^2-\frac{24}{4}+8$

$\Rightarrow (x-\frac{5}{2})^2-(y+\frac{1}{2})^2=2$

$\Rightarrow -\frac{(x-5/2)}{(\sqrt{2})^2}+\frac{(y+1/2)^2}{(\sqrt{2})^2}=1$

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega(\frac{5}{2}; \frac{-1}{2})$

$\mathcal{H}$ a pour equation : $\frac{-x^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$

D'où $\mathcal{H}$ est une hyperbole de centre Ω et de sommets : $B(0,\sqrt{2})$ et $B'(0,-\sqrt{2})$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ Mais dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a $B(\frac{5}{2}, \sqrt{2}, -\frac{1}{2})$ et

$B'(\frac{5}{2}; -\sqrt{2}; \frac{-1}{2})$

Asymptotes Δ et Δ' ont pour equations dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

$\Delta : y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}x = x$ et

$\Delta' : y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}x = -x$

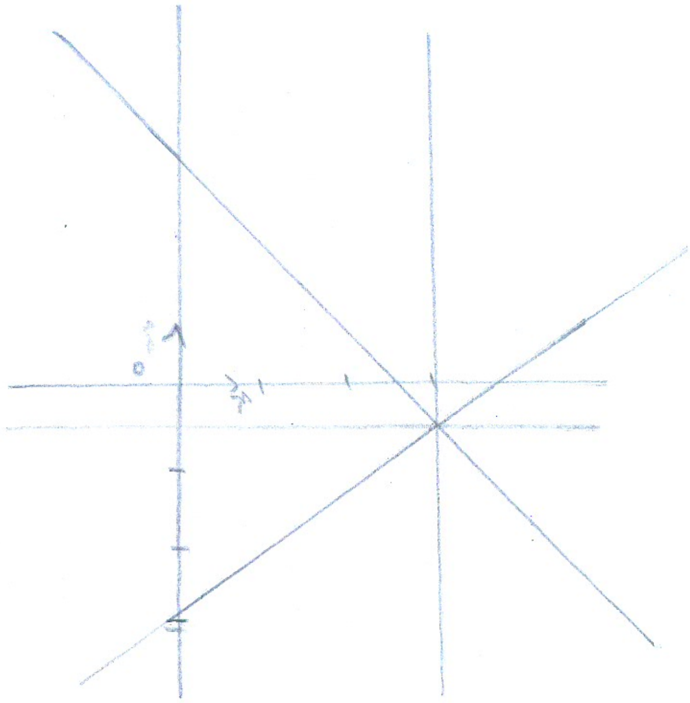
dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ on a :

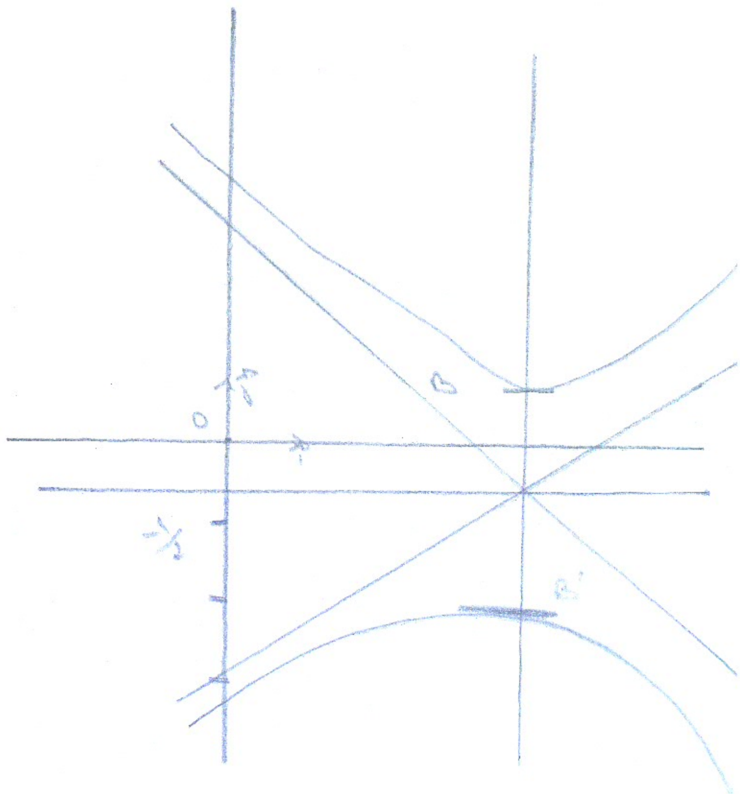
$y+\frac{1}{2}=x-\frac{5}{2} \Rightarrow \Delta : y=x-3$ et $y+\frac{1}{2}=x-\frac{5}{2}$

$\Rightarrow \Delta : y=x-3$ et $y+\frac{1}{2}=-x+\frac{5}{2}$

$\Rightarrow \Delta' : y=-x+2$

Δ





Exercice 4 :

$$\begin{cases} g(x) = 1 + x^3 - 3x^3 \ln x \text{ si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

1) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 + x^3 - 3(x^3 \ln x)$

$= 1 + 0 - 3 \times 0 = 1 = g(0)$

Donc g est continue en 0^+

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3\left(\frac{1}{x^3} + 1 - 3\ln x\right)$

$= +\infty\,(0 + 1 - \infty) = -\infty$

b) $g'(x) = 3x^2 - \left(9x^2 \ln x + 3x^3 \times \frac{1}{x}\right)$

$= 3x^2 - 9x^2 \ln x - 3x^2$

$= -9x^2 \ln x$

T.V de g :

x	0		1		$+\infty$
$-9x^2$	0	$-$		$-$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

c) g est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ et change de signe, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha > 1$

Comme $g(1) = 2 > 0$

et $g(2) = 9 - 24\ln 2 < 0$

alors $1 < \alpha < 2$

g est $\searrow$ sur $[1;+\infty[$ Pour $1 < x < \alpha$ on a

$g(x) > g(\alpha) = 0$

pour $x > \alpha$ on a

$g(x) < g(\alpha) = 0$

D'où

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + x^3}$; $x > 0$

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{-\infty}{1} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{1}{x^2}$

$= 0 \times 0 =$

Car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1 + x^3} = \lim \dfrac{x}{x^3} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

b) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+x^3) - 3x^2\ln x}{(1+x^3)^2}$

$= \dfrac{1+x^3-3x^3\ln x}{x(1+x^3)^2} = \dfrac{g(x)}{x(1+x^3)^2}$

T.V de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

3) $\forall x>1$, $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

a) f est continue sur $[1;+\infty[$ donc elle admet une primitive H dérivable sur $[1;+\infty[$

$F(x) = H(x) - H(1)$

Donc F est dérivable et $F'(x)$

$= H'(x) - 0$

$= f(x)$

Pour tout $x>1$, $f(x)>0$ donc F est croissante.

T.V de F :

x	1		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
$F(x)$	0	↗	

b) Pour $t \geq 1$ on a

$1 < t^3 \leq 1+t^3 \leq (1+t)^3$

Car $(1+t)^3 = 1+3t+3t^2+t^3$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(1+t)^3} \leq \dfrac{1}{1+t^3} \leq \dfrac{1}{t^3}$

$t>1 \Rightarrow \ln t > 0$

donc $\dfrac{\ln t}{(1+t)^3} \leq \dfrac{\ln t}{1+t^3} \leq \dfrac{\ln t}{t^3}$

$\Rightarrow \dfrac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leq \dfrac{\ln t}{t^3}$

c) $\int_1^x \dfrac{\ln t}{t^3}\,dt$

- $u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \dfrac{1}{t}$

$v'(t) = \dfrac{1}{t^3} \Rightarrow v(t) = \dfrac{-1}{2t^2}$

$\int_1^x \dfrac{\ln t}{t^3}\,dt = \left[\dfrac{-\ln t}{2t^2}\right]_1^x - \int_1^x -\dfrac{1}{t}\times\dfrac{1}{2t^2}\,dt$

$= \dfrac{-\ln x}{2x^2} + \dfrac{1}{2}\int_1^x \dfrac{dt}{t^3}$

$= \dfrac{-\ln x}{2x^2} + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{-1}{x^2}+1\right)$

$= \dfrac{-\ln x}{2x^2} + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{-1}{x^2}+1\right)$

$= \dfrac{-\ln x}{2x^2} - \dfrac{1}{4x^2} + \dfrac{1}{4}$

d) $\dfrac{1}{t(1+t)^2} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{1+t} + \dfrac{c}{(1+t)^2}$

d) $\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2}$

$= \frac{a(1+t)^2}{t(1+t)^2} + \frac{b(t+1)}{t(1+t)^2} + \frac{ct}{t(1+t)}$

$= \frac{(a+b)t^2 + (2a+b+c)t + a}{t(t+1)^2}$

$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \\ c=-1 \end{cases}$

e) a- on a $\frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^3}$

$\Rightarrow \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3} dt \leq \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t^3}$

on pose $J = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3} dt$

$u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{(1+t)^3} \Rightarrow v(t) = \frac{-1}{2(1+t)^2}$

$\Rightarrow J = \left[\frac{-\ln t}{2(1+t)^2}\right]_1^x + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t} \times \frac{1}{(t+1)^2} dt$

$= \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{t}{t+1}\right) + \frac{1}{t+1}\right]_1^x$

$= \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$= \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1-2\ln 2}{4}$

Donc :

$\int^x \frac{\ln t}{t^3} dt$ et $J = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3} dt$

$\frac{-\ln x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1-2\ln 2}{4}$

$\lim_{+\infty} \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\ln x}{x} \times \frac{x}{2(1+x)}$

$= 0 \times 0$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2(1+x)^2}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+x)$

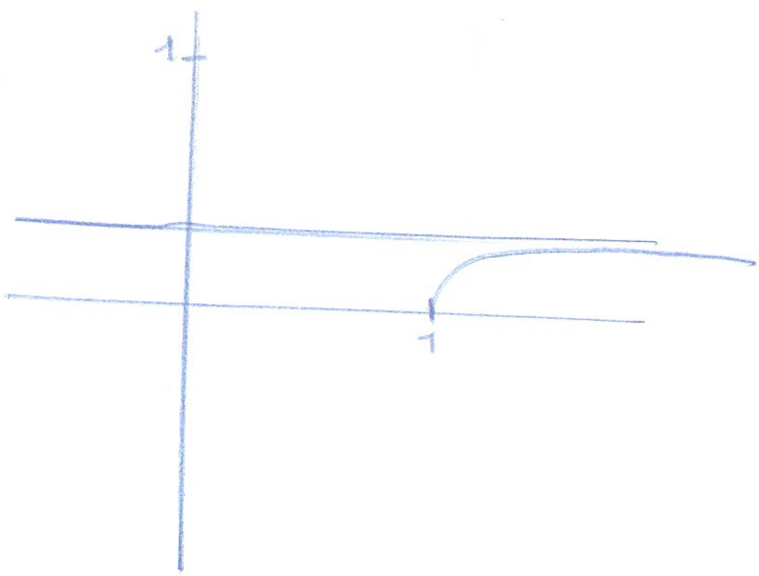
$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+x)$

$\ln 1 = 0$

donc

$0 - 0 + 0 - \frac{1-2\ln 2}{4} \leq \ell \leq \frac{1}{4}$

$\Rightarrow -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{4}$



Exercice 3 :

$f(x) = (3-x)e^x$

1\. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3-x)\underset{0}{e^x} =$

$= 0 \times 0 = 0$

$\Rightarrow y = 0$ A.H

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = (3-x)e^x = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3-x)e^x}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3}{x} - 1\right)e^x = -\infty$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une B.P de direction (oy)

b) $f'(x) = -e^x + (3-x)e^x$

$= (-1+3-x)e^x = (2-x)e^x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2-x = 0 \Rightarrow x = 2$

T.V de f :

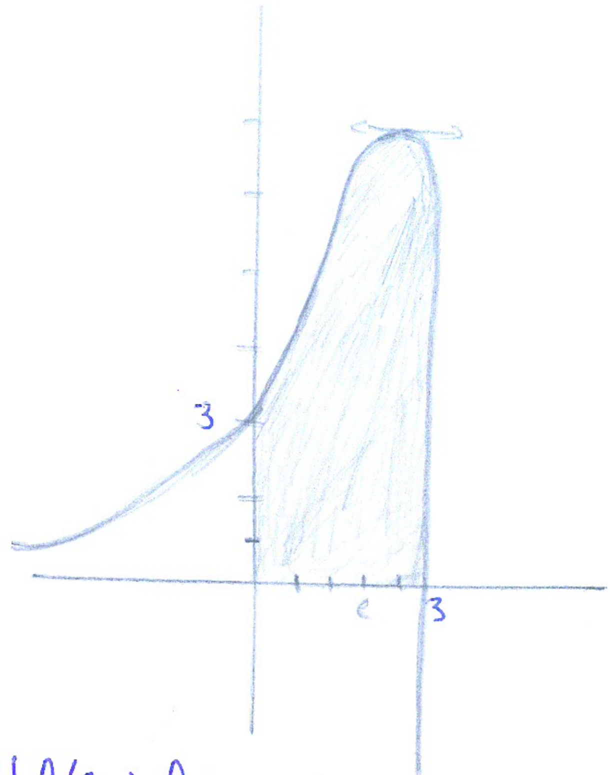
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$-\infty$

c) $\mathcal{C}_f \cap (ox)$: $f(x) = 0 \Rightarrow (3-x)e^x = 0$

$\Rightarrow 3-x = 0 \Rightarrow x = 3$

$\mathcal{C}_f \cap (ox) = \{(3,0)\}$

$\mathcal{C}_f \cap (oy) = \{(0,3)\}$



d) $f'(x) - f(x) = (2-x)e^x - (3-x)e^x$

$= (2-x-3+x)e^x = -e^x$

$\Rightarrow$ f est solution de l'equation differentielle $y' = y$

Calcul l'aire A :

$A = \int_0^3 f(x)\,dx$

$= [f(x) + e^x]_0^3 = e^3 - 4$

2) a- $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}}$

$= \dfrac{3^n \times 3 \times n!}{(n+1)n!\,3^n} = \dfrac{3}{(n+1)}$

or $n \geq 3 \Rightarrow n+1 \geq 3$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{3}$

$0 \leq \dfrac{3}{n+1} \leq \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow 0 \leq \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq \dfrac{3}{4}$

3-a) $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^3 (3-x)^n e^x dx$

$I_1 = \frac{1}{1!}\int_0^3 (3-x)^1 e^x dx$

$I_1 = \int_0^3 f(x) dx = A$

$\Rightarrow \boxed{I_1 = e^3 - 4}$

b) $0 < x < 3$

$-3 < -x < 0$

$0 < 3-x < 3$

$0 \leq (3-x)^n < 3^n$

$0 \leq (3-x)^n e^x < 3^n e^x$

$0 \leq \int_0^3 (3-x)^n e^x dx \leq 3^n [e^x]_0^3$

$0 \leq \frac{1}{n!}\int_0^3 (3-x)^n e^x dx \leq \frac{3^n}{n!}(e^3-1)$

$\boxed{I_n \leq U_n(e^3-1)}$

c) d'après 2-b) $\lim\limits_{+\infty} U_n = 0$

$\lim\limits_{+\infty} I_n = 0$

$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^3 (3-x)^{n+1} dx$

$\begin{cases} u = (3-x)^{n+1} \\ v' = e^{-x} \end{cases}$ $\begin{cases} u' = (n+1)(3-x) \\ v = e^x \end{cases}$

$I_{n+1} = [e^x(3-x)^{n+1}]_0^3 - \int_0^3 -(n+1)(3-x)^n e^x dt$

$\frac{1}{(n+1)!}[-3^{n+1} + (n+1)\int_0^3 (3-x)^n e^x dx$

$= -\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(n+1)}{(n+1)n!}\int_0^1 (3-x)^n e^x dx$

$\Rightarrow I_{n+1} = U_{n+1} + I_n$

d) Demonstrons par reccurence que $\forall n \geq 1$;

$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + I_n$

* Verifions pour $n = 1$

Pour $n = 1$ on a

$\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + I_1 = 1 + 3 + e^3 - 4$
$= e^3$

On suppose que:

$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \dots + \frac{3^n}{n!} + I_n$

on demontre que

$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + \frac{3^{n+1}}{(n+1)} + I$

On a:

$\underbrace{1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{2^n}}$ $+ \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$

$(e^3 - I_n) + 4_{n+1} + I_{n-1}$

Conclusion: $\forall n \geq 1$ on a

$e^3 = \underbrace{1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!}}_{S_n}$

On a: $e^3 = S_n + I_n$

$\Rightarrow S_n = e^3 - I_n$

$\lim\limits_{x \to +\infty} S_n = \lim\limits_{x \to +\infty} e^3 - I_n$

$= e^3 - 0$

$= e^3$.